Applicazione di tecniche di Infinitesimal Perturbation Analysis alle reti di Petri ibride.

Davide Nessi

Relatori: A. Giua, C. Seatzu

Motivazioni

I sistemi ad eventi discreti consentono di descrivere un gran numero di sistemi dinamici in vari campi:

- sistemi manifatturieri
- sistemi di telecomunicazioni
- sistemi di trasporto

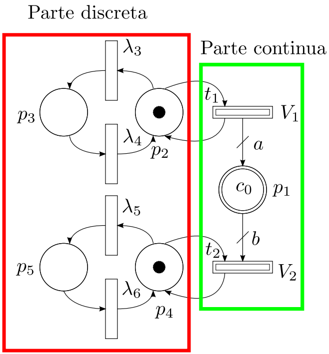
Un problema importante riguarda l'ottimizzazione.

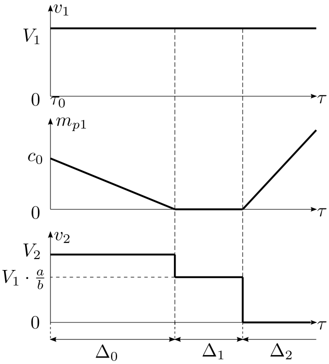
Reti di Petri ibride

Cosa sono le reti di Petri ibride:

- una classe di modelli che combinano dinamiche discrete e continue;
- estendono il tradizionale concetto di rete di Petri per includere il flusso di fluido;
- al concetto di stato viene aggiunto quello di macro-stato;
- al concetto di evento, quello di macro-evento.

Esempio Rete di Petri ibrida





Analisi perturbativa infinitesimale

- E' una tecnica semi-analitica per la stima dei gradienti delle funzioni di prestazione.
- Inizialmente era una tecnica per l'analisi di sensitività dei sistemi ad eventi discreti.
- Recentemente è stata indagata la possibilità di applicare questa tecnica alle reti di Petri ibride.

Tecnica semi-analitica significa che in parte sfrutta il risultato di simulazioni e in parte sfrutta formule e algoritmi.

Analisi perturbativa infinitesimale

Notazione:

- Funzione di prestazione: $J(\theta)$.
- Grazie all' IPA è possibile fornire una stima $\frac{dJ(\theta)}{d\theta}$
- Questa stima può essere utilizzata per l'ottimizzazione tramite algoritmi iterativi del tipo $\theta_{i+1} = \theta_i + \lambda_i \cdot \frac{dJ}{d\theta}$

Approccio proposto

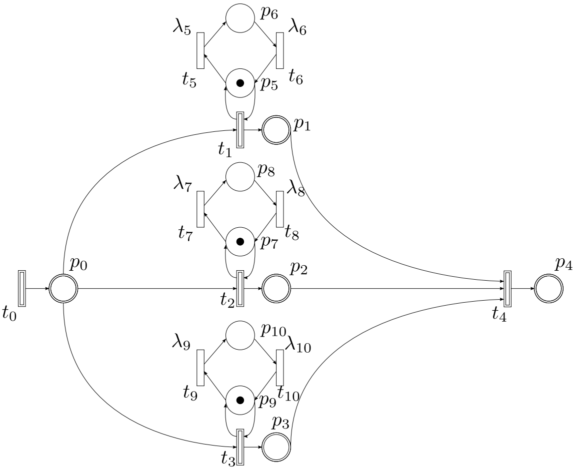
Per i nostri scopi è necessario:

- disporre di un software che consenta di simulare le reti di Petri ibride;
- che questa evoluzione possa essere vincolata a dei parametri da ottimizzare;
- implementare in linguaggio di programmazione alcuni algoritmi per la stima del gradiente delle funzioni di prestazione.

Il simulatore HYPENS

- E' un *tool* sviluppato da Sessego che permette di simulare l'evoluzione di una rete di Petri ibrida.
- E' scritto in MATLAB il che è un vantaggio.
- Limiti:
    1. non è possibile vincolare l'evoluzione della rete in funzione dei parametri da cui dipende la funzione obbiettivo;
    2. non è possibile specificare la velocità delle transizioni continue in forma chiusa.

Rete manifatturiera con tre macchine.



Descrizione del modello

- θ_i, $i = 1, 2, 3$ è un parametro a valore reale dal quale il processo dipende.
- Esso è un parametro di *routing*, rappresenta fisicamente la quantità di fluido che viene indirizzato dal posto p_0 alla transizione t_i quando tutte le macchine sono operative, ossia quando:
$$\mathbf{M}^d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$
- Esso prende il nome di *nominal routing fraction* di t_i.

I vincoli che tale parametro deve rispettare sono i seguenti:

- $\theta_i \in [0,1]\ \forall i \in \{1, 2, 3\}$
- $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$.

Descrizione del modello

Quindi se tutte le macchine sono operative allora:

$$v_i = \theta_i,\ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{1}$$

Se le macchine i, j sono operative mentre la macchina k è guasta allora:

$$v_i = \theta_i + \frac{\theta_k \theta_i}{\theta_i + \theta_j}; \tag{2}$$

e

$$v_j = \theta_j + \frac{\theta_k \theta_j}{\theta_i + \theta_j}. \tag{3}$$

Descrizione del modello

Se solo la macchina i è operativa mentre le macchine j e k sono guaste allora

$$v_i = 1; \tag{4}$$

mentre

$$v_j = v_k = 0. \tag{5}$$

Descrizione del modello.

La politica che si assume nel caso che qualche macchina ma non tutte sia non operativa è di dividere il flusso tra le macchine operative in proporzione al loro *nominal routing fraction*. Infine, se tutte le macchine sono guaste allora

$$v_i = 0, \ \ i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

In tutti i casi, tranne l'ultimo è facile osservare che $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.

Descrizione del modello

La funzione di prestazione $J(\boldsymbol{\theta})$ è così definita:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = T^{-1} \int_0^T v_4(\boldsymbol{\theta}; t) dt \tag{7}$$

e il problema di ottimizzazione che si considera è di massimizzare il valore atteso di questa funzione $E[J(\boldsymbol{\theta})]$. Per l'ottimizzazione di $J(\boldsymbol{\theta})$ viene utilizzato l'algoritmo del tipo Robbins-Monro che calcola una sequenza iterativa $\theta_k := (\theta_{1k}\theta_{2k})$. L'algoritmo necessita di una stima del gradiente della funzione di prestazione.

Stima del gradiente della funzione di prestazione

Fissato $\theta \in \Theta$ e definito l'insieme:

$$I(t) = \{i = 1, \cdots n \ : M_{p_i}(t) = 0\}. \tag{8}$$

Si definisce t_{max} l'ultimo istante di tempo in cui termina in un qualsiasi posto un periodo vuoto.

1. se $t_{max} = T$, allora per ogni $i \in I(t_{max})$:

$$\frac{dJ}{d\theta}(\theta) = T^{-1} \int_0^T \frac{\partial v_i}{\partial \theta}(\theta, t)dt; \tag{9}$$

2. se $t_{max} < T$, allora per ogni $i \in I(t_{max})$

$$\frac{dJ}{d\theta}(\theta) = T^{-1}(\int_0^{t_{max}} \frac{\partial v_i}{\partial \theta}(\theta, t)dt) + \int_{tmax}^T \frac{\partial V_x}{\partial \theta}(\theta, t)dt). \tag{10}$$

Stima del gradiente della funzione di prestazione

	$\frac{\partial v_1}{\partial \theta_1}$	$\frac{\partial v_1}{\partial \theta_2}$	$\frac{\partial v_2}{\partial \theta_1}$	$\frac{\partial v_2}{\partial \theta_2}$	$\frac{\partial v_3}{\partial \theta_1}$	$\frac{\partial v_3}{\partial \theta_2}$
M_1, M_2, M_3 ON	1	0	0	1	-1	-1
M_1, M_2 ON M_3 OFF	$\frac{\theta_2}{(\theta_1+\theta_2)^2}$	$-\frac{\theta_1}{(\theta_1+\theta_2)^2}$	$-\frac{\theta_2}{(\theta_1+\theta_2)^2}$	$\frac{\theta_1}{(\theta_1+\theta_2)^2}$	0	0
M_1, M_3 ON M_2 OFF	$\frac{1}{1-\theta_2}$	$\frac{\theta_1}{(1-\theta_2)^2}$	0	0	$-\frac{1}{1-\theta_2}$	$-\frac{\theta_1}{(1-\theta_2)^2}$
M_2, M_3 ON M_1 OFF	0	0	$\frac{\theta_2}{(1-\theta_1)^2}$	$\frac{1}{1-\theta_1}$	$-\frac{\theta_2}{(1-\theta_1)^2}$	$-\frac{1}{1-\theta_1}$
2 o più m. OFF	0	0	0	0	0	0

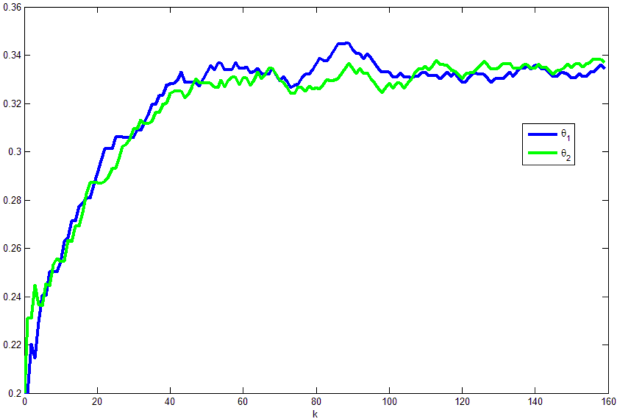
Tabella: I valori di $\frac{\partial v_i}{\partial \theta_j}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$ per il caso relativo alla rete manifatturiera con tre macchine.

Ottimizzazione dei parametri di routing

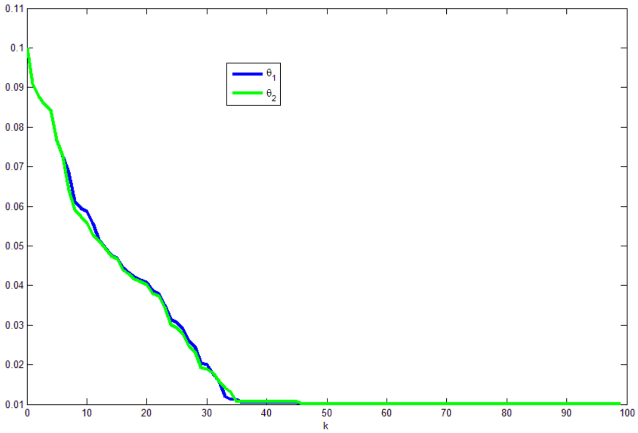
Si sono effettuate due simulazioni.

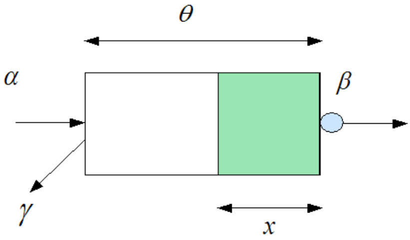
1. Nella prima i tassi di guasto e riparazione delle macchine sono stati supposti identici ($\lambda_{1,f} = \lambda_{2,f} = \lambda_{3,f} = 0.9$ e $\lambda_{1,r} = \lambda_{2,r} = \lambda_{3,r} = 0.1$);
2. Nel secondo caso una macchina sta per molto più tempo guasta rispetto alle altre ($\lambda_{1,f} = \lambda_{2,f} = 0.9$,$\lambda_{1,r} = \lambda_{2,r} = 0.1$ e $\lambda_{3,f} = 0.1$ e $\lambda_{3,r} = 0.9$).

Ottimizzazione dei parametri di routing



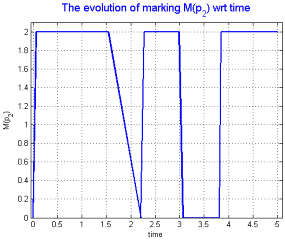
Ottimizzazione dei parametri di routing




θ
α
β
γ
x

Stima gradiente della perdita e della lunghezza media della coda

E' stato implementato in *MATLAB* l'algoritmo per la stima del gradiente delle funzioni di prestazione.



Stima gradiente della perdita e della lunghezza media delle coda

Le stime fornite dall'algoritmo sono le seguenti:

$$L'_T = -3;$$

e

$$Q'_T = 4.0916.$$

Conclusioni

Fra i possibili sviluppi futuri, vi è sicuramente lo studio di formule di analisi perturbativa infinitesimale per sistemi modellizzabili tramite le reti di Petri ibride e a cui possano essere applicate formule di ottimizzazione