Modelli Stocastici

Esercitazione 4

29 novembre 2018

Esercizio 1. Rappresentare il grafo della catena di Markov a tempo continuo il cui insieme di stati è $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e la cui matrice delle frequenze di transizione è la seguente:

$$Q = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Determinare mediante il criterio degli autovalori l'ergodicità della catena. Calcolare la componente stazionaria.

Esercizio 2. Un robot deve verniciare e lucidare delle carrozzerie di auto che arrivano secondo un processo di Poisson con parametro λ. Se il robot è impegnato, le carrozzerie in arrivo vengono dirottate altrove (scartate). Sia per la verniciatura che per la lucidatura il robot ha un tempo di servizio con distribuzione esponenziale e parametro μ. La verniciatura ha una probabilità p di essere eseguita correttamente. La lucidatura invece avviene sempre con successo. Considerare i seguenti casi.

- La verniciatura viene ripetuta fino a quando non viene eseguita correttamente dopodichè la carrozzeria viene lucidata.
- La verniciatura può essere eseguita al massimo due volte e se ancora non viene eseguita correttamente la carrozzeria viene scartata. Quando la verniciatura è stata eseguita correttamente, la carrozzeria viene lucidata.
- La verniciatura può essere eseguita al massimo due volte e sicuramente la seconda volta viene eseguita correttamente. Quando la verniciatura è stata eseguita correttamente, la carrozzeria viene lucidata.

(a) Per ognuno dei tre casi, rappresentare il grafo della catena di Markov a tempo continuo associata a questo processo e determinarne la matrice delle frequenze di transizione.

(b) Calcolare la probabilità che, in condizioni di equilibrio, una carrozzeria <u>in arrivo</u> debba essere scartata nei tre casi.

(c) Calcolare la probabilità di scartare una carrozzeria <u>in lavorazione</u> nel secondo caso.

Esercizio 3. Un sistema di produzione è composto di un magazzino capace di contenere sino a 3 pezzi e di un carrello trasportatore che si presenta al magazzino per prelevare pezzi e trasportarli ad un centro di raccolta. Il carrello arriva vuoto al magazzino in media 10 volte al giorno secondo un processo di Poisson, e preleva pezzi nel modo seguente: con probabilità 0.2 carica 3 pezzi, con probabilità 0.5 carica 2 pezzi e con probabilità 0.3 carica 1 pezzo.

Nel caso in cui il carrello arrivi al magazzino e non trovi pezzi da prelevare, esso ritorna vuoto al centro di raccolta. Il magazzino viene completamente rifornito quando il suo livello è minore o uguale ad 1 pezzo ed il rifornimento avviene dopo un intervallo di tempo distribuito esponenzialmente con media $1/50$ giorno.

(a) Rappresentare il processo che descrive lo stato del magazzino.

(b) Calcolare la probabilità π_v e π_f che in condizioni di regime il magazzino sia vuoto e pieno rispettivamente in condizioni di regime.

(c) Calcolare il numero medio di pezzi presenti nel magazzino a regime.

Esercizio 4. Un sistema di produzione è caratterizzato da un centro di lavorazione avente capacità di 3 pezzi e 2 serventi, indicati M_1 e M_2 rispettivamente. I pezzi arrivano al sistema secondo un processo di Poisson con parametro $\lambda = 10$. I due serventi hanno tempi di servizio con distribuzione esponenziale e parametri μ_1 e μ_2. I pezzi arrivano al centro di lavorazione, eventualmente attendono in coda, subiscono il servizio e quindi escono dal sistema.

Rappresentare la CMTC che descrive il processo di lavorazione nei seguenti casi.

(a) Se i due serventi sono liberi, un nuovo pezzo in arrivo viene assegnato ad M_1.

(b) Se i due serventi sono liberi, un nuovo pezzo in arrivo viene indifferentemente assegnato ad M_1 oppure ad M_2.

(c) Nell'ipotesi che i due serventi abbiano uguale tasso di servizio $\mu_1 = \mu_2 = 10$, calcolare il numero medio di pezzi presenti nel sistema di lavorazione, nei due casi sopra indicati.