Modelli Stocastici

Esercitazione 4

27 novembre 2018

Esercizio 1. Un sistema di lavorazione è costituito da un unico servente in grado di lavorare un solo pezzo alla volta. Ogni 5 secondi, con probabilità $a = 0.7$, arriva un pezzo nel sistema di lavorazione. Con probabilità $b = 0.6$ la lavorazione viene eseguita correttamente e il pezzo esce dal sistema. Con probabilità $1 - b$ il pezzo viene riparato e successivamente esce dal sistema. È possibile che contemporaneamente un pezzo esca dal sistema e un altro arrivi.

(a) Rappresentare il grafo della catena di Markov a tempo discreto associata a questo processo e determinare la matrice di probabilità di transizione.

(b) Si supponga che all'istante iniziale $k = 0$ il sistema possa essere inattivo o in lavorazione con probabilità 0.5. Si determini $\pi(k)$ per $k = 0, 1, 2$.

(c) Tale sistema è ergodico? Se si, determinare le probabilità di stato a regime.

Esercizio 2. Un sistema di produzione è costituito da una macchina operatrice alla quale arriva un pezzo ad ogni intervallo di tempo T con probabilità $p = 0.8$. La macchina è dotata di due serventi uguali. Ogni servente quando è impegnato completa la lavorazione in un intervallo di tempo T con probabilità $q = 0.9$. La macchina ha a disposizione per l'arrivo dei pezzi le sole due posizioni di lavoro per cui, se i due serventi sono occupati, un nuovo pezzo in arrivo viene scartato.

(a) Si rappresenti il grafo della catena di Markov a tempo discreto che descrive il processo di lavorazione (si esprimano i pesi degli archi in funzione di p e q).

(b) Si valuti l'ergodicità della catena, dopo aver chiarito cosa implica tale proprietà.

(c) Si calcolino le probabilità di stato in condizioni asintotiche.

(d) Si calcolino la probabilità che un pezzo in arrivo ha di essere scartato quando la macchina ha raggiunto una configurazione di regime.

Esercizio 3. Una linea transfer presenta, ad ogni ciclo, un pezzo in uscita con probabilità p. Ogni pezzo viene scaricato nel buffer di un robot solo se il robot è libero. In un tempo ciclo il robot esegue una operazione sul pezzo. Tale operazione può fallire con probabilità q e richiedere quindi un altro tempo di ciclo per essere ripetuta. La ripetizione dell'operazione può nuovamente fallire con la stessa probabilità. La capacità del buffer del robot è pari ad 1 pezzo e la durata di un tempo ciclo è di 10 secondi.

(a) Si determini la CMTD rappresentativa di questo processo.

(b) Si assuma $p = 0.9$ e $q = 0.2$. Si discuta mediante il criterio degli autovalori l'ergodicità del processo, spiegando cosa ciò implica fisicamente.

(c) Si calcolino le probabilità di stato a regime.

(d) Si calcoli la percentuale dei pezzi scartati η_{scarto} rispetto a quelli che entrano nel sistema in condizioni di regime.

(e) Si determini il numero medio di pezzi presenti nel buffer del robot in condizioni di regime.

(f) Si rappresenti infine la CMTD che descrive il processo nell'ipotesi però che il robot possa fallire l'operazione su un pezzo solo una volta.

Esercizio 4. Un sistema di comunicazione comprende una stazione trasmittente T_t ed una stazione ricevente T_r interconnesse attraverso un canale di trasmissione rumoroso. La stazione T_t invia periodicamente (ad intervalli di tempo pari a Δ [sec]) messaggi di lunghezza fissa alla stazione T_r. Il tempo di trasmissione è trascurabile e la probabilità che il messaggio inviato arrivi alla stazione T_r è pari a $p = 0.8$. La stazione T_r è in grado di elaborare correttamente il messaggio ricevuto in un arco temporale pari a Δ [sec] con probabilità $q = 0.6$. Altrimenti viene richiesto un altro periodo di Δ [sec] per una seconda elaborazione che avverrà sicuramente in modo corretto. Si consideri la stazione T_r con capacità di 1 messaggio.

(a) Si rappresenti il grafo della catena di Markov a tempo discreto che descrive il processo. In particolare si considerino tre diversi stati rappresentativi della condizione della stazione ricevente (vuota, con un messaggio in elaborazione, con un messaggio in ri-elaborazione).

(b) Si valuti l'ergodicità della catena, dopo aver fornito una definizione chiara di tale proprietà.

(c) Nel caso in cui la rete sia ergodica, si calcolino le probabilità di stato in condizioni di regime.

(d) Si calcoli il numero medio di messaggi presenti nella stazione T_r in condizioni di regime.

(e) Posto $\Delta = 20$ [sec], si calcoli il tasso dei messaggi elaborati correttamente in condizioni di regime.

(f) Si supponga ora che anche l'eventuale seconda elaborazione possa anch'essa fallire ed essere ripetuta indefinitamente con la stessa probabilità. Si rappresenti il grafo della catena di Markov a tempo discreto che descrive il processo. In particolare si considerino due diversi stati rappresentativi della condizione della stazione ricevente (vuota, con un messaggio in elaborazione).

(g) Si dimostri l'ergodicità della nuova catena e, posto ancora $\Delta = 20$ [sec], si calcoli il tasso dei messaggi elaborati correttamente a regime. Si confronti il valore così ottenuto con il valore ottenuto al punto (e) e si dia una spiegazione intuitiva in merito alla differenza riscontrata.

(h) Si supponga ora che la stazione T_r abbia capacità di 2 messaggi. Nell'ipotesi che (1) un solo messaggio alla volta possa essere elaborato e (2) l'eventuale seconda elaborazione sia eseguita certamente in modo corretto, si rappresenti la catena di Markov a tempo discreto rappresentativa del processo (tale catena ha cinque stati).