Modelli Stocastici

Esercitazione 3

21 novembre 2018

Esercizio 1. Vi sono 20 sorgenti che trasmettono con una velocità di picco pari a 10Mb/s con una probabilità pari a 0.1, mentre con probabilità 0.9 non sono attive. Inoltre, vi sono 80 sorgenti che trasmettono con una velocità di picco pari a 1Mb/s con una probabilità pari a 0.05, mentre con probabilità 0.95 non sono attive.

Determinare la massima capacità C_{opt} che il service provider deve allocare in modo che per non più di una frazione pari allo 0.0015 del tempo totale, la richiesta delle 100 sorgenti ecceda la capacità disponibile.

Esercizio 2. Si consideri il seguente processo stocastico. Si lancia un dado all'istante $\tau = 0$. Per ogni valore di $\tau \geq 0$, se esce il numero 1 o 6 all'istante τ, il dado viene rilanciato all'istante $\tau+1$; se esce il numero 2, 3, 4 o 5 all'istante τ il dado viene lasciato per sempre nella posizione in cui si trova all'istante τ.

- Descrivere la famiglia di variabili casuali $\{X_\tau, \tau \in \mathcal{N}\}$ e calcolarne la media $E[X_\tau]$. Il processo è stazionario? È ergodico? È indipendente?
- Dare una possibile realizzazione di questo processo durante i primi 9 istanti di tempo.
- Calcolare le funzioni di probabilità congiunta: $P(X_0 = 2, X_1 = 6)$ e $P(X_0 = 1, X_1 = 6)$.

Esercizio 3. Siano Z_1, Z_2, $\cdots$, variabili casuali distribuite identicamente e indipendenti con $P(Z_k = 1) = p$ e $P(Z_k = -1) = 1 - p$ per ogni $k = 1, 2, \cdots$.

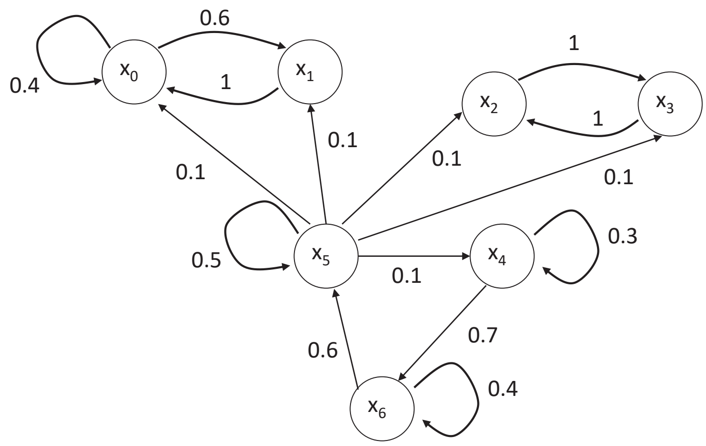
Sia inoltre

$$X_0 = 0, \qquad X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

La famiglia di variabili casuali $\{X_n,\ n \in \mathcal{N}\}$ è un processo stocastico e viene detto *passeggiata casuale unidimensionale*.

1. Si costruisca una possibile realizzazione di questo processo durante i primi 10 istanti di tempo.
2. Si ricavi il valore medio $E[X_n]$ della passeggiata casuale.
3. Si ricavi la varianza $Var[X_n]$ della passeggiata casuale nel caso in cui sia $p = q = 1/2$.

Esercizio 4. Si consideri la CMTD in figura.



a. Si individuino le componenti fortemente connesse.

b. Si stabilisca quali tra queste sono transienti e quali ergodiche.

c. Si specifichi se le eventuali componenti ergodiche sono periodiche o aperiodiche (nel primo caso si indichi anche quanto vale il periodo).

d. Si stabilisca se tale CMTD è ergodica e si spieghi chiaramente cosa implica la proprietà di ergodicità.

e. Si stabilisca se tale analisi cambierebbe cambiando il peso associato agli archi (senza però porre a zero il peso di alcun arco).

f. Nel caso in cui la risposta al punto (d) sia negativa si stabilisca se è possibile rendere la catena ergodica semplicemente cambiando il verso di un arco.

Esercizio 5. Rappresentare il grafo della catena di Markov a tempo discreto il cui insieme di stati è $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e la cui matrice di probabilità di transizione è la seguente:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Studiare l'ergodicità della catena sia mediante il criterio grafico che mediante quello analitico.

Calcolare le eventuali componenti stazionarie.