# Elementi di Analisi dei Sistemi
# Esercizi seconda prova intermedia

Alessandro Giua - giua@unica.it

07/04/2025

**Esercizio 1.** È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

(a) Si determini la matrice risolvente del sistema.

(b) Si determini la matrice transizione dello stato sfruttando le trasformate di Laplace.

(c) Supposto che lo stato iniziale sia $x(0) = [5 \quad 0]^T$, si determini, sfruttando le trasformate di Laplace, l'evoluzione libera dello stato $x_l(t)$ e dell'uscita $y_l(t)$.

(d) Si determini l'evoluzione forzata dello stato e dell'uscita quando al sistema viene applicato il segnale in ingresso il segnale $u(t) = 5\, e^{-2t}\delta_{-1}(t)$.

**Esercizio 2.** Il modello ingresso-uscita di un sistema lineare e stazionario vale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 6\frac{du(t)}{dt} + 9u(t).$$

(a) Si determini la funzione di trasferimento del sistema rappresentandola in forma polinomiale, in forma zeri-poli e in forma di Bode. Quanto vale il guadagno di Bode $K$ e il guadagno alle alte frequenze $K'$?

(b) Si determini mediante l'uso delle trasformate di Laplace la risposta indiciale di tale sistema. Si indichi la parte della risposta indiciale $y_{f\cdot o}$ che contiene i modi del sistema e la parte $y_{f\cdot p}$ che contiene i modi introdotti dall'ingresso.

(c) Si discuta se il valore iniziale e finale della risposta indiciale siano consistenti con quanto previsto dalla teoria.

(d) Si dia una rappresentazione grafica qualitativa dell'andamento della risposta indiciale. (È possibile verificare il grafico tramite l'utilizzo della funzione Matlab "risposta_indiciale.m".)

(e) Si consideri ora la risposta totale di tale sistema quando, a partire da condizioni iniziali non nulle, viene applicato in ingresso un gradino unitario. Si discuta se sia possibile scomporre tale risposta totale in un termine transitorio ed un termine di regime.

**Esercizio 3.** Il modello ingresso-uscita di un sistema lineare e stazionario vale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 4u(t).$$

(a) Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

(b) Si determinino mediante l'uso delle trasformate di Laplace le risposte forzate che conseguono ai due ingressi:

$$\begin{cases} u_1(t) = e^{-2t}\,\delta_{-1}(t) \\ u_2(t) = e^{-t}\,\delta_{-1}(t) \end{cases}$$

Indicare, se possibile, il termine transitorio e il termine di regime.

**Esercizio 4.** È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -19 & -2 \\ -2 & -16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

(a) Si determini la matrice risolvente.

(b) Si determini la matrice di transizione dello stato.

(c) Si calcoli la funzione di trasferimento e si determini un modello ingresso-uscita equivalente alla rappresentazione in variabili di stato.

(d) Si discuta se sia possibile determinare la risposta forzata dello stato e dell'uscita utilizzando la funzione di trasferimento.

(e) Si determini la risposta forzata dell'uscita quando in ingresso al sistema è presente il segnale $t\,\delta_{-1}(t)$, discutendo se sia possibile scomporla in un termine transitorio ed uno di regime.

**Esercizio 5.** Si consideri un sistema lineare e stazionario la cui funzione di trasferimento vale:

$$W(s) = \frac{20s + 120}{(s^2 + 23s + 60)}$$

(a) Si riconduca tale funzione alla forma di Bode indicandone esplicitamente tutti i parametri significativi (guadagno; numero di poli nell'origine $\nu$; parametri $\tau$ e punti di rottura $1/\mid\tau\mid$ per i termini binomi; parametri $\omega_n$, $\zeta$, $\omega_s$, $\omega_d$ e massimo scostamento $\Delta M$ dal diagramma asintotico dei moduli per i termini trinomi).

(b) Si tracci il diagramma di Bode della $W(j\omega)$.

(c) Si discuta se il diagramma di Bode abbia il significato fisico di risposta a regime per un ingresso sinusoidale.

**Esercizio 6.** È data la seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{2s + 20}{\frac{1}{10}s^2 + 6s + 90}.$$

(a) Si riconduca tale funzione alla forma di Bode indicandone esplicitamente tutti i parametri significativi (guadagno; numero di poli nell'origine $\nu$; parametri $\tau$ e punti di rottura $1/\mid\tau\mid$ per i termini binomi; parametri $\omega_n$, $\zeta$, $\omega_s$, $\omega_d$ e massimo scostamento $\Delta M$ dal diagramma asintotico dei moduli per i termini trinomi).

(b) Si tracci il diagramma di Bode di tale funzione.

(c) Si determini, se esistono, i valori del modulo e della pulsazione alla risonanza, e la banda passante a $-20$ dB.

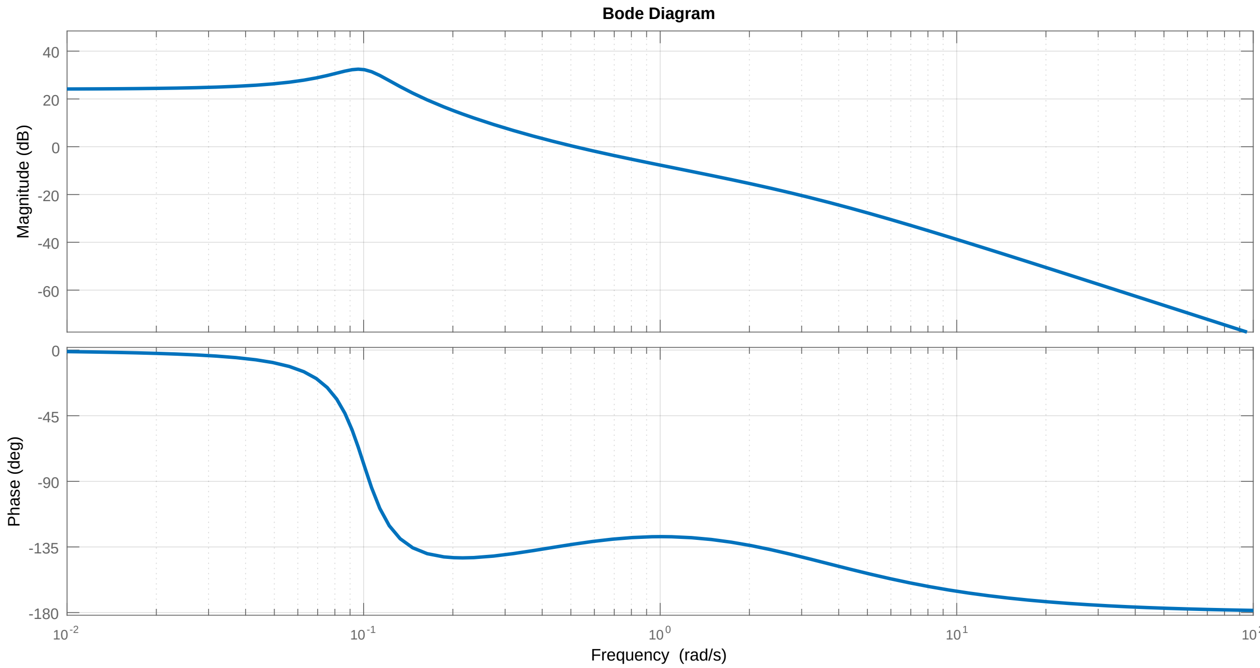


Figura 1: Diagramma di Bode, funzione incognita

(d) Si discuta se la banda passante di tale sistema aumenti, diminuisca o resti costante moltiplicando la funzione di trasferimento per $100$.

**Esercizio 7.** Una funzione di trasferimento i cui poli sono tutti a parte reale negativa ha il diagramma di Bode riportato in Figura 1.

(a) Si discuta se il diagramma di Bode abbia il significato fisico di risposta a regime per un ingresso sinusoidale.

(b) Si determini il valore a regime della risposta indiciale.

(c) Si determini il valore a regime della risposta armonica quando in ingresso si hanno i segnali:

$$\begin{cases} u_1 = 2\ \cos(0.5\,t) \\ u_2 = \cos(t) \end{cases}$$

(d) Per quale pulsazione $\omega$ l'uscita a regime che consegue ad un ingresso $\cos(\omega\ t)$ ha massima ampiezza?

(e) Si discuta se la funzione di trasferimento produca un'azione filtrante, in caso affermativo si identifichi il tipo di azione e si discuta per quali valori di pulsazione si concretizza l'azione filtrante. Se possibile si determini la relativa banda passante.

**Esercizio 8.** È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

(a) Si determinino gli stati di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.

(b) Cosa si può dire relativamente alla stabilità BIBO del sistema dato senza ricorrere al calcolo della funzione di trasferimento?

(c) Si determini la funzione di trasferimento del sistema dato.

(d) Si discuta la BIBO stabilità in base alla funzione di trasferimento e si discuta la consistenza con quanto ottenuto al punto (b).

**Esercizio 9.** Si consideri il seguente sistema non lineare autonomo

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -3x_1(t) + x_1^2(t) \\ \dot{x_2}(t) = 2x_1(t) + x_1^2(t) - x_2(t) \end{cases}$$

(a) Si determinino gli eventuali punti di equilibrio.

(b) Si discuta se in un sistema (come questo) che ammette due punti di equilibrio, entrambi possano essere *asintoticamente stabili* e se uno di essi possa essere *globalmente asintoticamente stabile*.