# Elementi di Analisi dei Sistemi
# Soluzione esercizi seconda prova intermedia

Gianluca Mereu, Alessandro Giua
{gianluca.mereu,giua}@diee.unica.it

24/05/2017

**Soluzione Esercizio 1.** *Il modello ingresso-uscita di un sistema lineare e stazionario vale:*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 6\frac{du(t)}{dt} + 9u(t).$$

(a) *Si determini la funzione di trasferimento del sistema rappresentandola in forma polinomiale, in forma zeri-poli e in forma di Bode. Quanto vale il guadagno di Bode $K$ e il guadagno alle alte frequenze $K'$?*

La funzione di trasferimento è una funzione razionale. Il suo denominatore è il polinomio caratteristico dell'omogenea associata. Il suo numeratore è il polinomio ottenuto con i coefficienti del secondo membro della equazione differenziale che rappresenta il modello IU.

- Forma polinomiale:
$$\frac{s^2 + 6s + 9}{s^2 + 2s}$$
- Forma zeri-poli:
$$\frac{(s+3)^2}{s(s+2)}$$
- Forma di Bode:
$$\frac{9}{2}\frac{(1+\frac{1}{3}s)(1+\frac{1}{3}s)}{s(1+\frac{1}{2}s)}$$

Il guadagno di Bode è il rapporto tra i coefficienti non nulli di ordine minimo nella forma polinomiale:

$$K = \frac{b_0}{a_1} \ = \ \frac{9}{2}$$

Il guadagno alle alte frequenze è il rapporto tra i coefficienti non nulli di ordine massimo nella forma polinomiale:

$$K' = \frac{b_2}{a_2} \ = \ 1$$

(b) *Si determini mediante l'uso delle trasformate di Laplace la risposta indiciale di tale sistema. Si indichi la parte della risposta indiciale $y_{f.o}$ che contiene i modi del sistema e la parte $y_{f.p}$ che contiene i modi introdotti dall'ingresso.*

La risposta indiciale $w_{-1}(t)$ è la risposta forzata che consegue all'applicazione di un gradino unitario: $u(t) = \delta_{-1}(t)$. Come tutte le risposta forzate ad ingressi canonici, essa può essere scomposta in un termine $y_{f.o}$ contenente una combinazione lineare dei modi propri del sistema ed un termine $y_{f.p}$ contenente i modi introdotti dall'ingresso.

Calcoliamo la risposta indiciale mediante le trasformate di Laplace:

$$\mathcal{L}[w_{-1}(t)] = W_{-1}(s) = W(s) \cdot U(s) \ = W(s) \cdot \frac{1}{s} \ = \ \frac{s^2 + 6s + 9}{s^2(s+2)}.$$

Tale funzione razionale è strettamente propria e vale:

$$W_{-1}(s) = \frac{R_1}{s+2} + \frac{R_{2,0}}{s} + \frac{R_{2,1}}{s^2}$$

dove

- $R_1 = \lim_{s\to -2}\left((s+2)\ \frac{s^2+6s+9}{s^2(s+2)}\right) = \boxed{\frac{1}{4}}$

- $R_{2,0} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1!}\ \frac{d}{ds}\left[s^2\ \frac{s^2+6s+9}{s^2(s+2)}\right]\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{(2s+6)(s+2)-(s^2+6s+9)}{(s+2)^2}\right)\ = \boxed{\frac{3}{4}}$

- $R_{2,1} = \lim_{s\to 0}\left(s^2\ \frac{s^2+6s+9}{s^2(s+2)}\right) = \boxed{\frac{9}{2}}$

e dunque

$$W_{-1}(s) = \frac{1/4}{s+2} + \frac{3/4}{s} + \frac{9/2}{s^2}.$$

Antitrasformando:

$$w_{-1}(t) = \left(\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4} + \frac{9}{2}\ t\right)\delta_{-1}(t)$$

dove il termine che contiene i modi del sistema (associati alle radici $p_1 = -2$ e $p_2 = 0$) vale:

$$y_{f.o} = \left(\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}\right)\delta_{-1}(t)$$

e il termine che contiene i modi introdotti dall'ingresso vale:

$$y_{f.p} = \frac{9}{2}\ t\ \delta_{-1}(t).$$

In questo caso la funzione di trasferimento ha un polo $p = 0$ di molteplicità $\nu = 1$ che coincide con il polo della $U(s)$ e dunque come atteso dalla teoria[1] vale:

$$y_{f.p} = \hat{R}\frac{t^\nu}{\nu!}\delta_{-1}(t) \qquad \text{con} \qquad \hat{R} = \lim_{s\to 0} s^\nu W(s) \qquad \text{ovvero} \qquad y_{f.p} = \frac{9}{2}\ t\ \delta_{-1}(t).$$

(c) *Si discuta se il valore iniziale e finale della risposta indiciale siano consistenti con quanto previsto dalla teoria.*

- Il sistema è proprio ma non strettamente proprio. Possiamo dunque affermare[2] che in $t = 0$ la risposta indiciale è discontinua e vale: $w_{-1}(0^-) = 0$ e $w_{-1}(0^+) = K' = 1$.
Calcolando il valore della $w_{-1}(0^+)$ si ottiene come atteso:

$$w_{-1}(0^+) = \frac{3}{4}\ + \left(\frac{9}{2}\cdot 0\ +\ \frac{1}{4}e^{-2\cdot 0}\right)\ =\ 1$$

- Quando il sistema ammette risposta a regime permanente, il valore di regime della risposta indiciale coincide[3] con il guadagno di Bode $K$. In questo caso, dato che la funzione di trasferimento non ha tutti i poli a parte reale negativa, il sistema non ammette risposta a regime permanente e tale risultato non si applica.
Possiamo comunque calcolare $w_{-1}(t)$ per $t \to \infty$. Vale

$$\lim_{t\to\infty} e^{-2t} = 0 \qquad \text{e dunque per } t \gg 0 \text{ vale} \qquad w_{-1}(t) \approx \frac{3}{4} + \frac{9}{2}t.$$

[1] Vedi Proposizione 6.29 del libro di testo.
[2] Vedi Proposizione 6.28 del libro di testo.
[3] Vedi Proposizione 6.30 del libro di testo.

(d) *Si dia una rappresentazione grafica qualitativa dell'andamento della risposta indiciale. (È possibile verificare il grafico tramite l'utilizzo della funzione Matlab risposta_indiciale.m.)*

La rappresentazione grafica della risposta indiciale e delle sue componenti è mostrata in Figura 1.

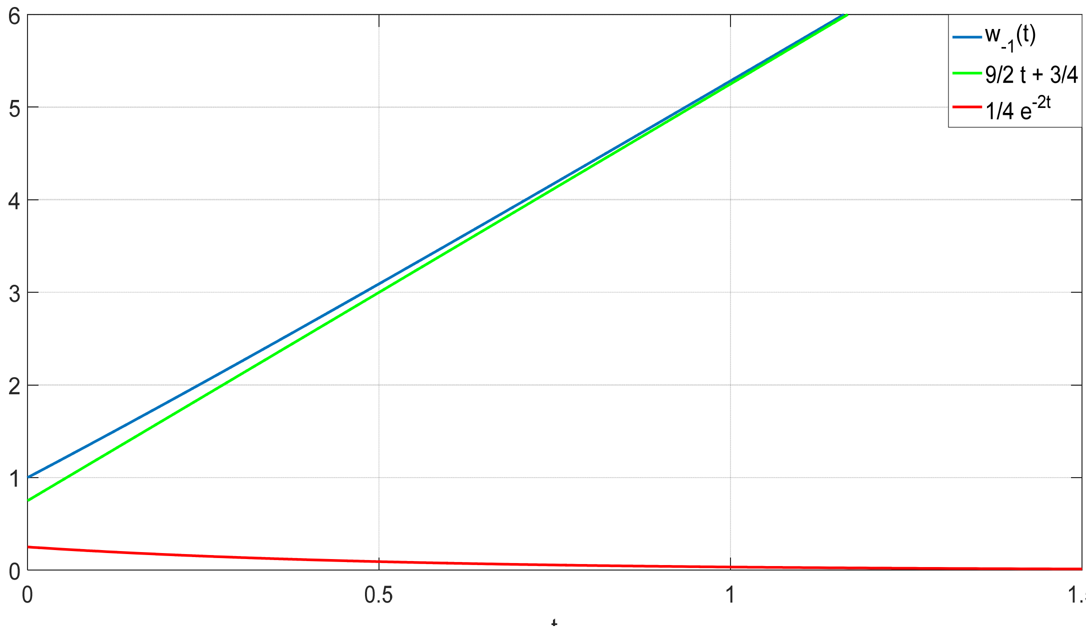


Figura 1: Rappresentazione grafica della risposta indiciale e delle sue componenti.

(e) *Si consideri ora la risposta totale di tale sistema quando, a partire da condizioni iniziali non nulle, viene applicato in ingresso un gradino unitario. Si discuta se sia possibile scomporre tale risposta totale in un termine transitorio ed un termine di regime.*

Come precedentemente discusso, in questo caso non è possibile scomporre l'uscita in un termine transitorio ed uno a regime perché i poli della funzione di trasferimento non sono tutti a parte reale negativa, di conseguenza non tutti i modi del sistema tenderanno a zero al crescere del tempo.

**Soluzione Esercizio 2.** *Il modello ingresso-uscita di un sistema lineare e stazionario vale:*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 4u(t).$$

*(a) Si determini la funzione di trasferimento del sistema.*

$$W(s) = \frac{4}{s^2 \ + \ 7s + 10} \ = \ \frac{4}{(s+5)(s+2)}$$

(b) *Si determinino mediante l'uso delle trasformate di Laplace le risposte forzate che conseguono ai due ingressi:*

$$\begin{cases} u_1 = e^{-2t}\,\delta_{-1}(t) \\ u_2 = e^{-t}\,\delta_{-1}(t) \end{cases}$$

*Indicare, se possibile, il termine transitorio e il termine di regime.*

Dato un sistema lineare e stazionario avente una funzione di trasferimento $W(s)$ è possibile determinare la risposta forzata $y_f(t)$ ad un ingresso $u(t)$ grazie alle trasformate di Laplace mediante la relazione:

$$Y_f(s) = W(s) \cdot U(s) \qquad \text{che implica} \qquad y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s) \cdot U(s)]$$

1. $\mathbf{u_1 \ = \ e^{-2t}}$

   La trasformata dell'ingresso vale:

   $$U_1(s) = \mathcal{L}[u_1(t)] = \frac{1}{(s+2)}$$

   e dunque

   $$Y_{f,1}(s) = \frac{4}{(s+5)(s+2)} \frac{1}{(s+2)} \ = \ \frac{R_1}{s+5} + \frac{R_{2,0}}{s+2} + \frac{R_{2,1}}{(s+2)^2}$$

   dove

   - $R_1 = \lim_{s \to -5} \left( (s+5) \ \frac{4}{(s+5)(s+2)^2} \right) = \boxed{\frac{4}{9}}$
   - $R_{2,0} = \lim_{s \to -2} \left( \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[ (s+2)^2 \ \frac{4}{(s+5)(s+2)^2} \right] \right) = \lim_{s \to -2} \left( \frac{0 \cdot (s+5) - 4(1)}{(s+5)^2} \right) \ = \boxed{-\frac{4}{9}}$
   - $R_{2,1} = \lim_{s \to -2} \left( (s+2)^2 \ \frac{4}{(s+2)^2(s+5)} \right) = \boxed{\frac{4}{3}}$

   Antitrasformando:

   $$y_{f,1}(t) = \left( \underbrace{\frac{4}{9} e^{-5t} - \frac{4}{9} e^{-2t}}_{y_{f.o,1(t)}} \underbrace{+ \frac{4}{3} t \ e^{-2t}}_{y_{f.p,1}(t)} \right) \delta_{-1}(t)$$

   Tutti i poli della funzione di trasferimento sono a parte reale strettamente negativa, quindi è possibile scomporre l'uscita $y(t)$ in un termine transitorio ed uno di regime:

   - Il **termine transitorio** è composto dalla combinazione lineare dei modi propri del sistema:

     $$y_{t,1}(t) \ = \ y_{f.o,1}(t) \ = \left( \frac{4}{9} e^{-5t} - \frac{4}{9} e^{-2t} \right) \delta_{-1}(t)$$

   - Il **termine di regime** è composto dai termini introdotti dall'ingresso:

     $$y_{r,1}(t) \ = \ y_{f.p,1}(t) \ = \frac{4}{3} \ t \ e^{-2t} \ \delta_{-1}(t)$$

   In Figura 2 è mostrato l'andamento della risposta forzata $y_{f,1}(t)$ e dei termini di regime e transitorio. Considerando che sono presenti due modi aperiodici stabili con costanti di tempo $\tau$ pari a: $\tau_1 = 0.2s$, $\tau_2 = 0.5s$ il modo più lento, caratterizzato da $\tau_2$ può considerarsi estinto dopo $5\tau$, si può facilmente osservare che effettivamente dopo circa 2.5 secondi la risposta totale praticamente coincide con il termine di regime.

2. $\mathbf{u_2 \ = \ e^{-t}}$

   $$U_2(s) = \mathcal{L}[u_2(t)] = \frac{1}{(s+1)}$$

   $$Y_{f,2}(s) = \frac{4 \ s}{(s+5)(s+2)} \frac{1}{(s+1)} \ = \ \frac{R_1}{s+5} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+1}$$

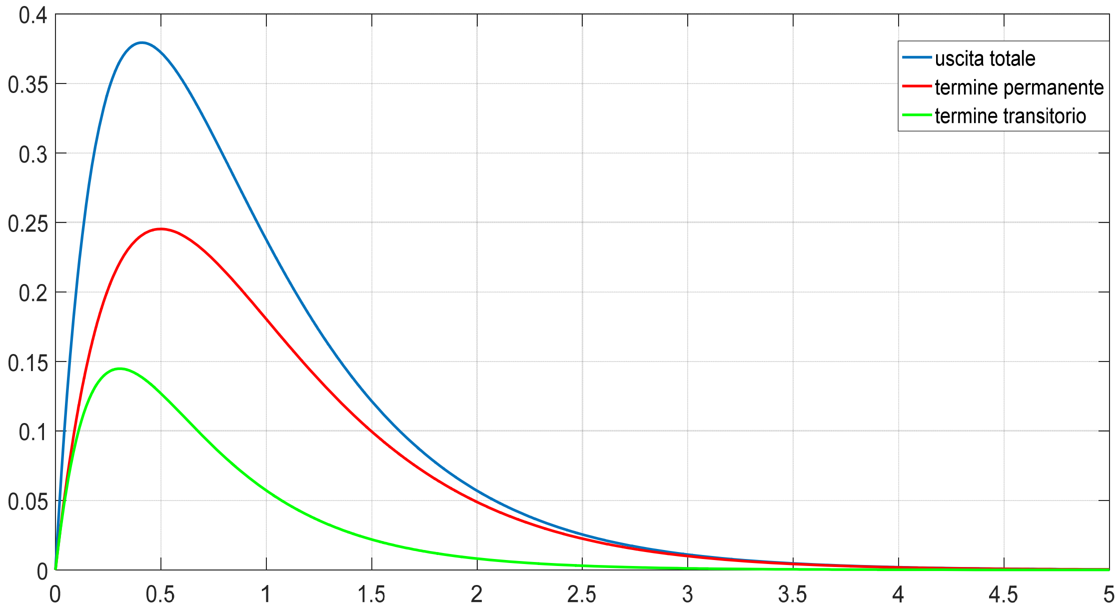


Figura 2: Rappresentazione grafica della risposta forzata $y_{f\ 1}$.

- $R_1 = \lim_{s \to -5} \left( (s+5)\, \frac{s}{(s+5)(s+2)(s+1)} \right) = \boxed{-\frac{5}{12}}$
- $R_2 = \lim_{s \to -2} \left( (s+2)\, \frac{s}{(s+5)(s+2)(s+1)} \right) = \boxed{\frac{2}{3}}$
- $R_3 = \lim_{s \to -1} \left( (s+1)\, \frac{s}{(s+5)(s+2)(s+1)} \right) = \boxed{-\frac{1}{4}}$

$$y_{f,2}(t) = \left( \underbrace{-\frac{5}{12}e^{-5t} + \frac{2}{3}e^{-2t}}_{y_{f.o,2}(t)} \underbrace{-\frac{1}{4}e^{-t}}_{y_{f.p,2}(t)} \right) \delta_{-1}(t)$$

Valgono le considerazioni fatte al punto precedente ed è possibile scomporre l'uscita $y_{f,2}(t)$ in un termine transitorio ed uno di regime:

- Il **termine transitorio** è composto dalla combinazione lineare dei modi propri del sistema:

$$y_{t,2}(t) = \; y_{f.o,2}(t) \; = \left( -\frac{5}{12}e^{-5t} + \frac{2}{3}e^{-2t} \right) \delta_1(t)$$

- Il **termine di regime** è composto dai termini introdotti dall'ingresso:

$$y_{r,2}(t) = \; y_{f.p,2}(t) \; = -\frac{1}{4}\, e^{-t}\, \delta_{-1}(t)$$

In Figura 2 è mostrato l'andamento della risposta forzata $y_{f,2}(t)$ e dei termini di regime e transitorio. Valgono le medesime considerazioni fatte al punto precedente, una volta estinto il modo più lento l'uscita la risposta totale praticamente coincide con il termine di regime.

NB: Si noti che in questo caso il termine in regime permanente è caratterizzato da un unico modo che tende anche esso a 0 per $t \to \infty$. Il fatto che tale modo si estingua non modifica il suo significato fisico e non giustifica il posizionamento di tale modo nel termine transitorio.

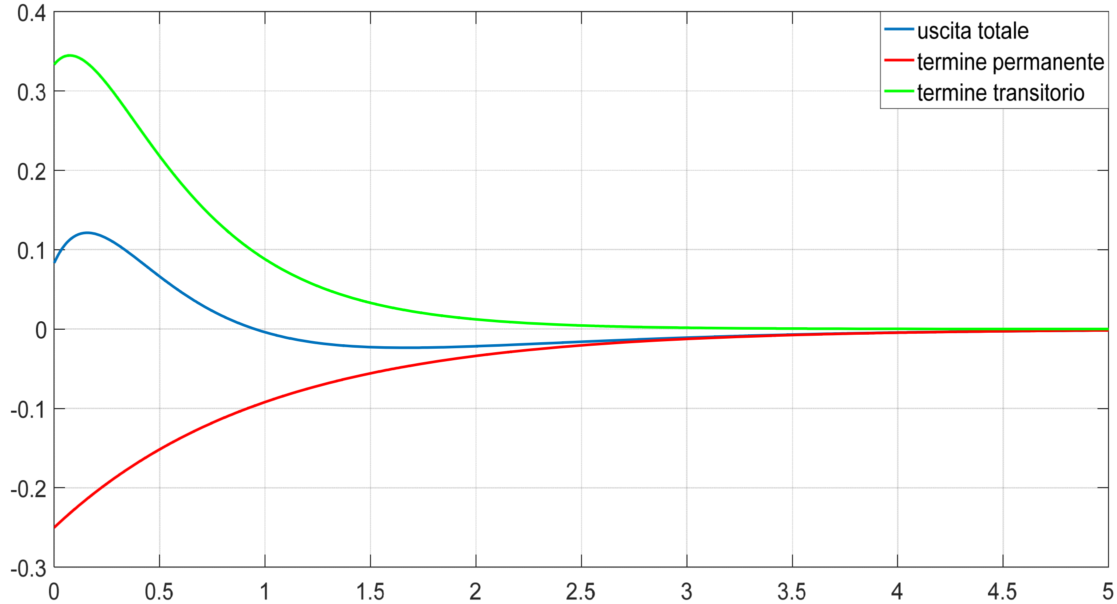


Figura 3: Rappresentazione grafica della risposta forzata $y_{f\ 2}$.

**Soluzione Esercizio 3.** *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

*dove*

$$A = \begin{bmatrix} -19 & -2 \\ -2 & -16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

*(a) Si determini la matrice risolvente.*

Per definizione la *matrice risolvente* del sistema è la matrice $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+19 & 2 \\ 2 & s+16 \end{bmatrix}$$

$$det(sI - A) \ = \ (s+19)(s+16) - 4 \ = \ s^2 + 35s + 304 - 4 \ \rightarrow \ \begin{cases} \lambda_1 = -20 \\ \lambda_2 = -15 \end{cases}$$

$$(sI - A)^{-1} \ = \ \frac{1}{(s+20)(s+15)} \begin{bmatrix} (s+16) & -2 \\ -2 & (s+19) \end{bmatrix}$$

(b) *Si determini la matrice di transizione dello stato.*

È possibile determinare la matrice di transizione dello stato antitrasformando la matrice risolvente:

$e^{A\ t} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$

Determiniamo la forma residui poli della matrice risolvente:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{R_1}{(s+20)} + \dfrac{R_2}{(s+15)} & \dfrac{R_3}{(s+20)} + \dfrac{R_4}{(s+15)} \\ \dfrac{R_3}{(s+20)} + \dfrac{R_4}{(s+15)} & \dfrac{R_5}{(s+20)} + \dfrac{R_6}{(s+15)} \end{bmatrix}$$

- $R_1 = \lim_{s\to -20} \left( (s+20)\, \dfrac{(s+16)}{(s+20)(s+15)} \right) = \boxed{\dfrac{4}{5}}$
- $R_2 = \lim_{s\to -15} \left( (s+15)\, \dfrac{(s+16)}{(s+20)(s+15)} \right) = \boxed{\dfrac{1}{5}}$
- $R_3 = \lim_{s\to -20} \left( (s+20)\, \dfrac{-2}{(s+20)(s+15)} \right) = \boxed{\dfrac{2}{5}}$
- $R_4 = \lim_{s\to -15} \left( (s+15)\, \dfrac{-2}{(s+20)(s+15)} \right) = \boxed{-\dfrac{2}{5}}$
- $R_5 = \lim_{s\to -20} \left( (s+20)\, \dfrac{(s+19)}{(s+20)(s+15)} \right) = \boxed{\dfrac{1}{5}}$
- $R_6 = \lim_{s\to -15} \left( (s+15)\, \dfrac{(s+19)}{(s+20)(s+15)} \right) = \boxed{\dfrac{4}{5}}$

$$e^{At} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{-20\,t} + e^{-15\,t} & 2e^{-20\,t} - 2e^{-15\,t} \\ 2e^{-20\,t} - 2e^{-15\,t} & e^{-20\,t} + 4e^{-15\,t} \end{bmatrix}$$

(c) *Si calcoli la funzione di trasferimento e si determini un modello ingresso-uscita equivalente alla rappresentazione in variabili di stato.*

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}\, B \;+\; D \;=\; \frac{2s^2 + 71s + 600}{s^2 + 35s + 300}$$

Il modello ingresso uscita equivalente alla rappresentazione in variabili di stato è:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 35\frac{dy(t)}{dt} + 300\, y(t) = 2\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 71\frac{du(t)}{dt} + 600\, u(t).$$

(d) *Si discuta se sia possibile determinare la risposta forzata dello stato e dell'uscita utilizzando la funzione di trasferimento.*

Utilizzando la funzione di trasferimento è possibile determinare solamente la risposta forzata dell'uscita. La risposta forzata dello stato dipende dalla rappresentazione in VS e non è univocamente desumibile dal modello IU.

(e) Si determini la risposta forzata dell'uscita quando in ingresso al sistema è presente il segnale $t \cdot \delta_{-1}(t)$, discutendo se sia possibile scomporla in termine transitorio ed uno di regime.

$U(s) = \mathcal{L}^{-1}[u(t)] = \frac{1}{s^2}$

$$Y_f(s) = W(s) \cdot U(s) \;=\; \frac{2s^2 + 71s + 600}{(s+20)(s+15)}\,\frac{1}{s^2} \;=\; \frac{R_1}{(s+20)} + \frac{R_2}{(s+15)} + \frac{R_{3,0}}{s} + \frac{R_{3,1}}{s^2}$$

- $R_1 = \lim_{s\to -20} \left( (s+20)\ \dfrac{2s^2+71s+600}{(s+20)(s+15)s^2} \right) = \boxed{\dfrac{1}{100}}$
- $R_2 = \lim_{s\to -15} \left( (s+15)\ \dfrac{2s^2+71s+600}{(s+20)(s+15)s^2} \right) = \boxed{\dfrac{1}{75}}$
- $R_{3,0} = \lim_{s\to 0} \left( \dfrac{1}{1!}\ \dfrac{d}{ds} \left[ s^2\ \dfrac{2s^2+71s+600}{(s+20)(s+15)s^2} \right] \right) = \lim_{s\to 0} \left( \dfrac{(4s+71)((s+20)(s+15)) - (2s+35)(2s^2+71s+600)}{((s+20)(s+15))^2} \right) = \boxed{\dfrac{1}{300}}$
- $R_{3,1} = \lim_{s\to 0} \left( s^2\ \dfrac{2s^2+71s+600}{(s+20)(s+15)s^2} \right) = \boxed{2}$

$$y_f(t) = \left( \underbrace{\frac{1}{100}e^{-20\ t} - \frac{1}{75}e^{-15\ t}}_{y_{f.o}(t)} + \underbrace{\frac{1}{300} + 2t}_{y_{f.p}(t)} \right) \delta_{-1}(t)$$

Tutti i poli della funzione di trasferimento sono a parte reale strettamente negativa, quindi è possibile scomporre l'uscita $y_f(t)$ in un termine transitorio ed uno di regime:

- Il **termine transitorio** è composto dalla combinazione lineare dei modi propri del sistema:

$$y_t(t) = \ y_{f.o}(t) \ = \left( \frac{1}{100}e^{-20\ t} - \frac{1}{75}e^{-15\ t} \right) \delta_{-1}(t)$$

- Il **termine di regime** è composto dai termini introdotti dall'ingresso:

$$y_r(t) = \ y_{f.p}(t) \ = \left( \frac{1}{300} + 2t \right) \delta_{-1}(t)$$

**Soluzione Esercizio 4.** *Si consideri un sistema lineare e stazionario la cui funzione di trasferimento vale:*

$$W(s) = \frac{20s+120}{(s^2+23s+60)}$$

(a) *Si riconduca tale funzione alla forma di Bode indicandone esplicitamente tutti i parametri significativi (guadagno; numero di poli nell'origine $\nu$; parametri $\tau$ e punti di rottura $1/\mid\tau\mid$ per i termini binomi; parametri $\omega_n$, $\zeta$, $\omega_s$, $\omega_d$ e massimo scostamento $\Delta M$ dal diagramma asintotico dei moduli per i termini trinomi).*

Analizzando la funzione di trasferimento risulta evidente il termine binomio al numeratore; al denominatore invece è presente un polinomio di secondo grado, ad esso può esser associato un termine trinomio oppure due termini binomi. Per capire a quale forma è riconducibile il denominatore della $W(s)$ è necessario determinare la natura delle sue radici:

$P(s) \ = \ s^2+23s+60 \ \Rightarrow \ \Delta = 23^2-4\cdot 1\cdot 60 \ = \ 529-240 > 0$ radici reali e distinte, al denominatore saranno presenti due termini binomi.

$$P(s) \ = \ 0 \ \Rightarrow \ s^2+23s+60s \ = \ (s+20)(s+3)$$

Riportiamo la $W(s)$ in forma di Bode mettendo in evidenza 120 al numeratore e 60 al denominatore:

$$W(s) = \frac{120}{60}\frac{1+6s}{(1+\frac{s}{3})(1+\frac{s}{20})}$$

- Guadagno:

$K = \frac{120}{60} \ = \ 2$

| **MODULO** | **FASE** |
|---|---|
| $K_{db} = 20\log_{10}(2) \ = \ 6 \ db$ <br><br> *Il diagramma dei moduli del guadagno K è una retta costante di ampiezza* $6db$ | $K > 0 \rightarrow \angle K = 0$ <br><br> *Il diagramma delle fasi del guadagno K è una retta costante di ampiezza* $0$ *gradi* |

- Numeratore:

Fattore binomio $(1 + 6s)$; zero reale in $\alpha = -6$, $\tau_1 = -\dfrac{1}{\alpha} \ = \ 0.1667$

| **MODULO** | **FASE** |
|---|---|
| *Punto di rottura:* $\frac{1}{\lvert\tau_1\rvert} = 6$ *rad/s* <br><br> Il diagramma asintotico dei moduli di un fattore binomio al numeratore è una spezzata, per $\omega_{\rightarrow 0} = 0$, dal punto di rottura prosegue come una retta avente coefficiente angolare di $+20\frac{db}{decade}$ | Il diagramma asintotico delle fasi del termine binomio al numeratore è una spezzata: per $\omega_{\rightarrow 0} = 0$, per $\omega_{\rightarrow\infty} = +90$ gradi (poiché $\tau > 0$), queste due semirette sono raccordate tramite il segmento che le interseca una decade prima ed una decade dopo rispetto al punto di rottura. I due raccordi saranno in corrispondenza delle pulsazioni: <br> – $\frac{1}{10\tau_1} = 0.6$ *rad/s* <br> – $\frac{10}{\tau_1} = 60$ *rad/s* |

- Denominatore:

(a) Fattore binomio $(1 + \frac{1}{3}s)$; polo reale in $\alpha = -3$, $\tau_2 = 1/3$

| **MODULO** | **FASE** |
|---|---|
| *Punto di rottura:* $\frac{1}{\tau_2} = 3$ *rad/s* <br><br> Il diagramma asintotico dei moduli di un fattore binomio al denominatore è una spezzata, per $\omega_{\rightarrow 0} = 0$, dal punto di rottura prosegue come una retta avente coefficiente angolare di $-20$*db/decade* | Il diagramma asintotico delle fasi del termine binomio al denominatore è una spezzata: per $\omega_{\rightarrow 0} = 0$, per $\omega_{\rightarrow\infty} = -90$ gradi (poiché $\tau > 0$), queste due semirette sono raccordate tramite il segmento che le interseca una decade prima ed una decade dopo rispetto al punto di rottura. I due raccordi saranno in corrispondenza delle pulsazioni: <br> – $\frac{1}{10\tau_2} = 0.3$ *rad/s* <br> – $\frac{10}{\tau_2} = 30$ *rad/s* |

(b) Fattore binomio $(1 + \frac{1}{20}s)$; polo reale in $\alpha = -20$, $\tau_3 = 1/20$

| MODULO | FASE |
|---|---|
| *Punto di rottura:* $\frac{1}{\tau_3} = 20$ *rad/s*<br><br>Valgono le stesse considerazioni fatte in precedenza. | – $\frac{1}{10\tau_3} = 2$ *rad/s*<br>– $\frac{10}{\tau_3} = 200$ *rad/s* |

(b) *Si tracci il diagramma di Bode della $W(j\omega)$.*

Il diagramma di Bode della $W(j\omega)$ è riportato in Figura 4.

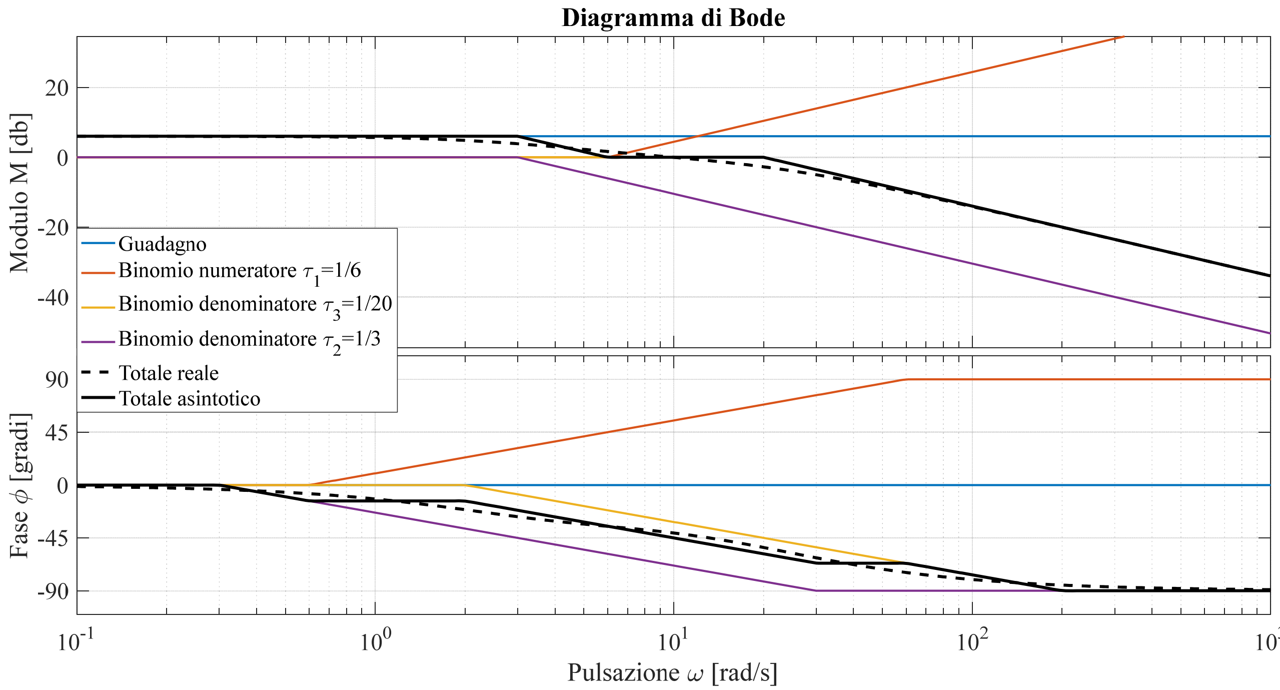


Figura 4: Diagramma di Bode della $W(s) = \frac{20s+120}{(s^2+23s+60)}$.

(c) *Si discuta se il diagramma di Bode abbia il significato fisico di risposta a regime per un ingresso sinusoidale.*

La funzione di trasferimento ha tutti i poli a parte reale strettamente minore di 0 perciò essa ha significato fisico di risposta a regime per ingresso sinusoidale.

**Soluzione Esercizio 5.** *È data la seguente funzione di trasferimento:*

$$W(s) = \frac{2s+20}{\frac{1}{10}s^2+6s+90}.$$

*(a) Si riconduca tale funzione alla forma di Bode indicandone esplicitamente tutti i parametri significativi (guadagno; numero di poli nell'origine $\nu$; parametri $\tau$ e punti di rottura $1/\mid\tau\mid$ per i termini binomi; parametri $\omega_n$, $\zeta$, $\omega_s$, $\omega_d$ e massimo scostamento $\Delta M$ dal diagramma asintotico dei moduli per i termini trinomi).*

Analizzando la funzione di trasferimento risulta evidente il termine binomio al numeratore; al denominatore invece è presente un polinomio di secondo grado, ad esso può esser associato un termine trinomio oppure due termini binomi.

Per capire a quale forma è riconducibile il denominatore della $W(s)$ è necessario determinare la natura delle sue radici:

$$P(s) \;=\; \frac{1}{10}s^2+6s+90 \;\Rightarrow\; \Delta = 6^2-4\cdot\frac{1}{10}\cdot 90 \;=\; 36-36=0$$

Una radice reale con molteplicità $\nu = 2$, di conseguenza al denominatore saranno presenti due termini binomi.

$$P(s) \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{10}s^2+6s+90s \;=\; \frac{1}{10}(s+30)^2$$

Riportiamo la $W(s)$ in forma di Bode mettendo in evidenza 20 al numeratore e 90 al denominatore:

$$W(s) = \frac{20}{90}\frac{1+\frac{1}{10}s}{(1+\frac{s}{30})(1+\frac{s}{30})}$$

- Guadagno:

  $K = \frac{20}{90}$

| **MODULO** | **FASE** |
|---|---|
| $K_{db} = 20\log_{10}(20/90) \;=\; -13.06\ db$<br><br>*Il diagramma dei moduli del guadagno K è una retta costante di ampiezza* $6.02db$ | $K > 0 \rightarrow \angle K = 0$<br><br>*Il diagramma delle fasi del guadagno K è una retta costante di ampiezza* $0$ *gradi* |

- Numeratore:

  Fattore binomio $(1+\frac{1}{10}s)$; zero reale in $\alpha = -10$, $\tau_1 = -\dfrac{1}{\alpha} \;=\; 0.1$

| **MODULO** | **FASE** |
|---|---|
| *Punto di rottura:* $\frac{1}{\lvert\tau_1\rvert} = 10$ *rad/s*<br><br>Il diagramma asintotico dei moduli di un fattore binomio al numeratore è una spezzata, per $\omega_{\rightarrow 0} = 0$, dal punto di rottura prosegue come una retta avente coefficiente angolare di $+20\frac{db}{decade}$ | Il diagramma asintotico delle fasi del termine binomio al numeratore è una spezzata: per $\omega_{\rightarrow 0} = 0$, per $\omega_{\rightarrow\infty} = +90$ gradi (poiché $\tau > 0$), queste due semirette sono raccordate tramite il segmento che le interseca una decade prima ed una decade dopo rispetto al punto di rottura. I due raccordi saranno in corrispondenza delle pulsazioni:<br>– $\frac{1}{10\tau_1} = 0.01$ *rad/s*<br>– $\frac{10}{\tau_1} = 1$ *rad/s* |

- Denominatore:

  Al denominatore è presente un fattore binomio con molteplicità $\nu = 2$, i parametri caratteristici ($\tau$, punto di rottura) saranno i medesimi per entrambi i termini. Non è necessario indicarli due volte ma durante il tracciamento del diagramma totale di Bode è necessario ricordarsi della molteplicità del polo.

(a) Fattore binomio $(1 + \frac{1}{30}s)$; polo reale in $\alpha = -30$, $\tau_2 = 1/30$

| MODULO | FASE |
|---|---|
| *Punto di rottura:* $\frac{1}{\tau_2} = 30$ *rad/s*<br><br>Il diagramma asintotico dei moduli di un fattore binomio al denominatore è una spezzata, per $\omega_{\to 0} = 0$, dal punto di rottura prosegue come una retta avente coefficiente angolare di $-20$*db/decade* | Il diagramma asintotico delle fasi del termine binomio al denominatore è una spezzata: per $\omega_{\to 0} = 0$, per $\omega_{\to\infty} = -90$ gradi (poiché $\tau > 0$), queste due semirette sono raccordate tramite il segmento che le interseca una decade prima ed una decade dopo rispetto al punto di rottura. I due raccordi saranno in corrispondenza delle pulsazioni:<br>– $\frac{1}{10\tau_2} = 3$ *rad/s*<br>– $\frac{10}{\tau_2} = 300$ *rad/s* |

(b) *Si tracci il diagramma di Bode di tale funzione.*

Il diagramma di Bode della $W(j\omega)$ è riportato in Figura 5.

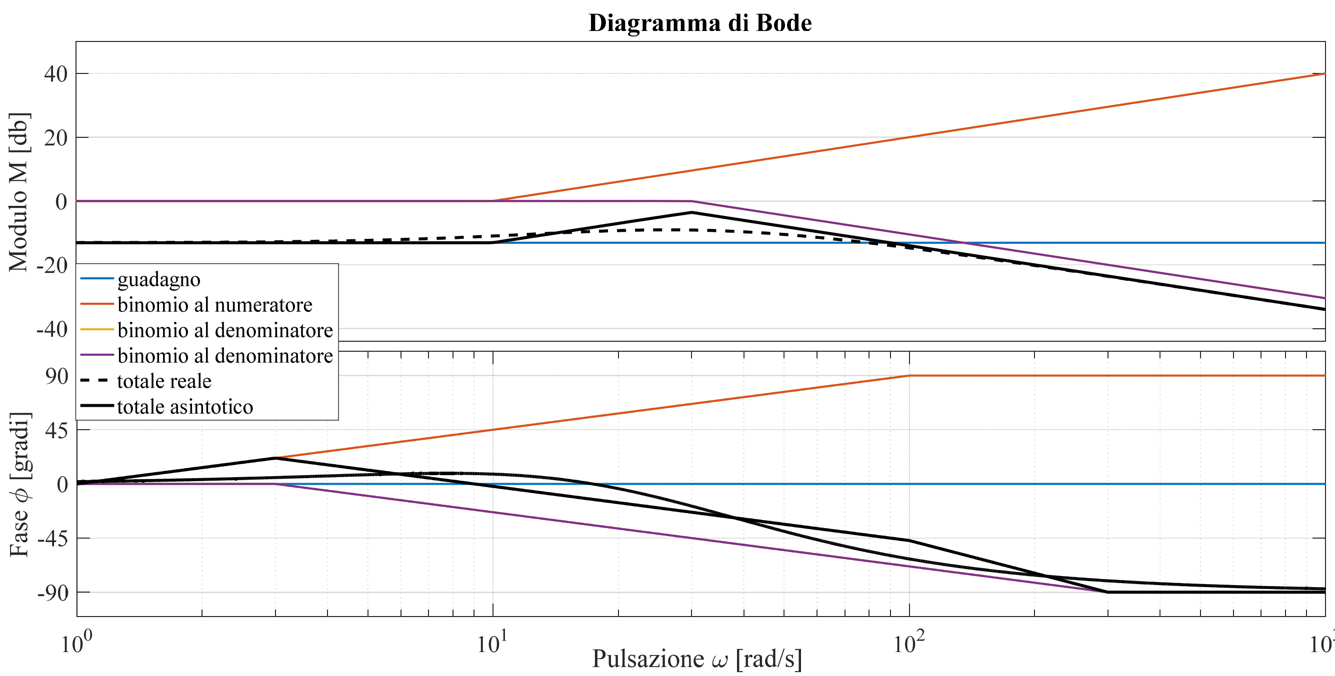


Figura 5: Diagramma di Bode della $W(s) = \frac{2s+20}{(1/10s^2+6s+90)}$.

(c) *Si determini, se esistono, i valori del modulo e della pulsazione alla risonanza, e la banda passante a* $-20$ *db.*

Analizzando solamente il diagramma reale dei moduli non è immediato osservare quale sia il punto di massimo del diagramma dei moduli, grazie al diagramma asintotico però si può facilmente individuare che il punto di massimo è situato nella pulsazione $\omega = 30$ *rad/s*. Il valore del modulo alla risonanza è di circa $M_r = -9db$, mentre lo sfasamento è di $-18$ gradi.

Dal diagramma osserviamo che $M_{db}(0) = -13db$, la banda passante a $-20$ $db$ è data dal valore della frequenza in corrispondenza della quale il modulo vale $-13 - 20 = -43$ $db$. Da diagramma possiamo osservare che questo si verifica in $\omega_{20} = 3\ 10^3$*rad/s* da cui $B_{20} = \omega_{20}/(2\pi) = 3 \cdot 10^3/(2\pi) \simeq 477\ Hz$.

(d) *Si discuta se la banda passante di tale sistema aumenti, diminuisca o resti costante moltiplicando la funzione di trasferimento per* $100$*.*

La banda passante resta costante.

**Soluzione Esercizio 6.** *Una funzione di trasferimento i cui poli sono tutti a parte reale negativa ha il diagramma di Bode riportato in Figura 6.*

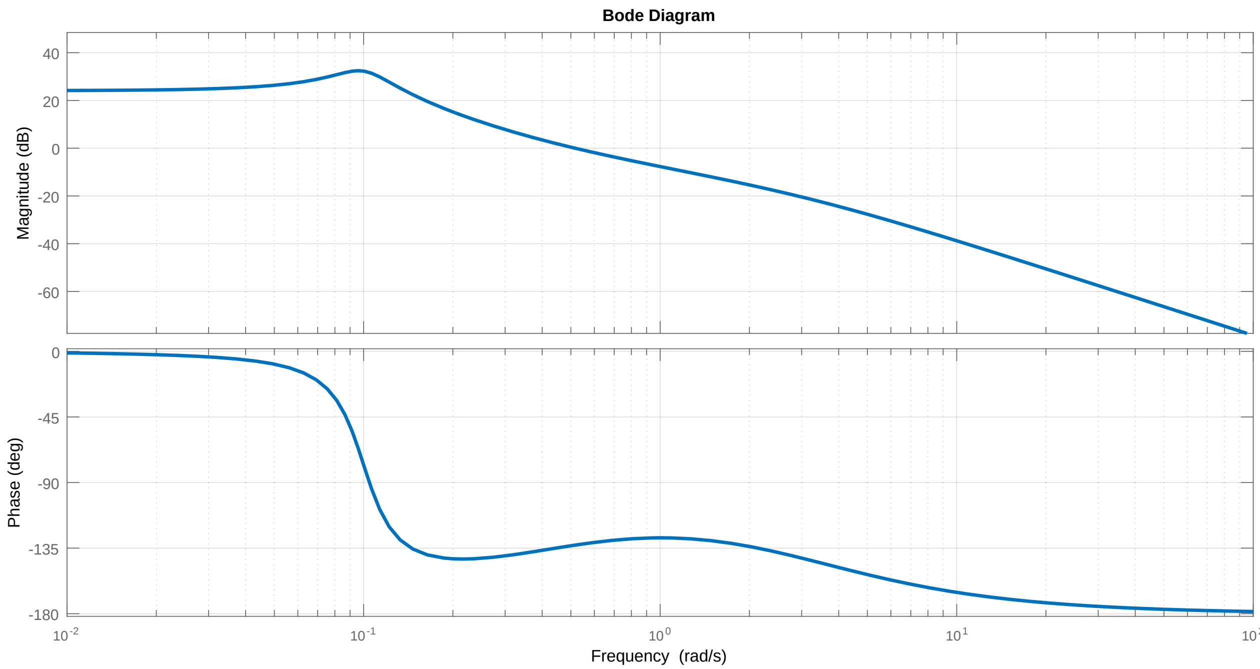


Figura 6: Diagramma di Bode, funzione incognita

(a) *Si discuta se il diagramma di Bode abbia il significato fisico di risposta a regime per un ingresso sinusoidale.*

Il testo afferma che la funzione di trasferimento ha tutti i poli a parte reale strettamente negativa, possiao quindi affermare che essa ha significato fisico di risposta a regime per ingresso sinusoidale.

(b) *Si determini il valore a regime della risposta indiciale.*

Il valore a regime della risposta indiciale coincide con il guadagno di Bode $K$ e può essere ricavato dall'asintoto $K_{db}$ per $\omega_{\to 0}$ sul diagramma dei moduli. Vale infatti $K_{db} = 25\ db$ da cui si ricava $K = 10^{K_{db}/20} = 17.8$ e quindi $\lim_{t\to\infty} w_{-1}(t) \simeq w_{-1,reg}(t) = 17.8$.

(c) *Si determini il valore a regime della risposta armonica quando in ingresso si hanno i segnali:*

$$\begin{cases} u_1 = 2\ \cos(0.5\ t) \\ u_2 = \cos(t) \end{cases}$$

Dato un sistema rappresentato da una funzione di trasferimento avente tutti i poli a parte reale negativa e, dato un ingresso sinusoidale avente pulsazione $\omega$ e modulo $U$, è possibile determinare la risposta armonica di tale sistema. Essa sarà ancora un segnale sinusoidale avente pulsazione $\omega$, modulo $U \cdot M(\omega)$ e sfasamento $\phi(\omega)$. I valori $M(\omega)$ e $\phi(\omega)$ possono essere determinati direttamente dal diagramma di bode dei moduli ($M(\omega)$) e della fasi ($\phi(\omega)$) in corrispondenza della pulsazione del segnale in ingresso al sistema.

- $\mathbf{u_1 = 2}\ \cos(\mathbf{0.5\ t})$
  Dal diagramma di Bode, in corrispondenza di $\omega = 0.5$ si osserva $M_{db} \simeq 0\ db$ ovvero $M = 1$ e $\phi \simeq -135\ gradi = -2.35\ rad$
  $$y_{1,r}(t) = 2\ \cos(0.5t - 2.35)$$
- $\mathbf{u_2} = \cos(\mathbf{t})$ Dal diagramma di Bode, in corrispondenza di $\omega = 1$ si osserva $M \simeq -10\ db$ ovvero $M = 0.32$ e $\phi \simeq -130\ gradi = -2.27\ rad$
  $$y_{2\ regime}(t) = 0.32\ \cos(t - 2.27)$$

(d) *Per quale pulsazione $\omega$ l'uscita a regime che consegue ad un ingresso $\cos(\omega\ t)$ ha massima ampiezza?*

L'uscita a regime avrà massima ampiezza in corrispondenza della pulsazione $\omega$ alla quale il diagramma dei moduli ha valore massimo, quindi in $\omega \simeq 10^-1\ rad/s$.

(e) *Si discuta se la funzione di trasferimento produca un'azione filtrante e in caso affermativo si identifichi il tipo di azione e si discuta per quali valori di pulsazione si concretizza l'azione filtrante. Se possibile si determini la relativa banda passante.*

La funzione di trasferimento produce un'azione filtrante di tipo passabasso, è possibile determinare ad esempio la banda a $-20\ db$. Dal diagramma osserviamo che $M_{db}(0) = 25db$, la banda passante a $-20\ db$ è data dal valore della frequenza in corrispondenza della quale il modulo vale $25 - 20 = 5\ db$. Da diagramma possiamo osservare che questo si verifica in $\omega = 0.4$*rad/s* da cui $B_{20} = 2\pi \cdot 0.4/(2\pi) \simeq 0.064\ Hz$.

**Soluzione Esercizio 7.** *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

*dove*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

*(a) Si determinino gli stati di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.*

Per determinare gli stati di equilibrio del sistema determiniamo se la matrice $A$ sia singolare o meno. È immediato verificare che $det(A) = 0$ perciò la matrice è singolare ed il sistema ha un numero infinito di stati di equilibrio. Essi sono gli stati che giacciono lungo la retta $-5x_1 - x_2 = 0$.

La matrice è triangolare superiore, gli autovalori sono dunque sulla diagonale e valgono $-5$ e $0$. Dunque tale matrice ha: (a) un autovalore a parte reale negativa di molteplcità unitaria; (b) un autovalore a parte reale nulla di molteplicità unitaria (e dunque anche di indice unitario). Grazie al *criterio degli autovalori* possiamo affermare che tutti gli stati di equilibrio sono stabili e che il sistema è *stabile* (ma non asintoticamente stabile).

(b) *Cosa si può dire relativamente alla stabilità BIBO del sistema dato senza ricorrere al calcolo della funzione di trasferimento?*

Se il sistema in variabili di stato fosse asintoticamente stabile, potremmo affermare con certezza che esso è BIBO stabilità (condizione sufficiente) senza determinare la funzione di trasferimento solamente. In questo caso, tuttavia, è necessario determinare la funzione di trasferimento.

(c) *Si determini la funzione di trasferimento del sistema dato.*

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}\ B\ +\ D\ =\ \frac{s^2 - 16}{s(s + 5)}$$

(d) *Si discuta la BIBO stabilità in base alla funzione di trasferimento e si discuta la consistenza con quanto ottenuto al punto (b).*

Analizzando i poli della funzione di trasferimento si determina che il sistema è BIBO instabile poichè non tutti i poli sono a parte reale negativa. Questo risultato è consistente con quanto determinato al punto (b): infatti se il modello in VS è stabile il corrispondente modello IU può essere sia BIBO stabile (se ogni polo corrispondente ad un autovalore a parte reale nulla si cancella con uno zero) sia BIBO instabile (in assenza di cancellazione).

**Soluzione Esercizio 8.** *Si consideri il seguente sistema non lineare autonomo*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + x_1^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + x_1^2(t) - x_2(t) \end{cases}$$

(a) *Si determinino gli eventuali punti di equilibrio.*

I punti di equilibrio sono le soluzione del sistema

$$\begin{cases} -3x_1 + x_1^2 = 0 \\ 2x_1 + x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(-3 + x_1) = 0 \\ 2x_1 + x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione si annulla quando $x_1 = 0$ oppure quando $x_1 = 3$, sostituendo nella seconda equazioni troviamo due punti di equilibrio:

$$x_{e,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_{e,1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(b) *Si studi la stabilità dei punti di equilibrio mediante il primo criterio di Lyapunov.*

Dato un sistema non lineare $\dot{x}(t) = f(x(t))$, è possibile ottenere il sistema lineare $\delta\dot{x}(t) = J(x_e)\delta x(t)$ tramite linearizzazione nell'intorno di un punto di equlibrio $x_e$. La matrice $J(x_e)$ è la *matrice Jacobiana* della $f(t)$ calcolata nel punto di equilibrio $x_e$. Il primo criterio di Lyapunov fornisce condizioni sufficienti per determinare l'asintotica stabilità o l'instabilità di un punto di equilibrio, analizzando gli autovalori della $J(x_e)$.

Determiniamo lo Jacobiano del sistema in esame:

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 2x_1 & 0 \\ 2 + 2x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

Analiziamo separatamente i due punti d'equilibrio:

- $x_{e,1} = [0 \;\; 0]^T$

$$J(x_{e,1}) = J(0,0) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di $J(x_{e,1})$ sono tutti a parte reale negativa, possiamo quindi affermare che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

- $x_{e,1} = [0 \;\; 0]^T$

$$J(x_{e,2}) = J(3,15) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di $J(x_{e,2})$ sono uno a parte reale negativa ed uno a parte reale positiva, possiamo quindi affermare che il punto $x_{e,2} = [3 \;\; 15]^T$ è un punto di equilibrio instabile.