

Elementi di Analisi dei Sistemi

Esercizi prima prova intermedia

Alessandro Giua - giua@diee.unica.it

07/04/2017

Esercizio 1. Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

- (a) Si discuta che cosa si intende per modello ingresso-uscita, ricordando che forma esso assume nel caso generale e indicando tutte le grandezze che lo caratterizzano.
- (b) Si discuta che cosa si intende per modello in variabili di stato, ricordando che forma esso assume nel caso generale e indicando tutte le grandezze che lo caratterizzano.
- (c) Si discuta che cosa si intende per *sistema dinamico* e si ricordi come tale proprietà possa verificarsi sia in base alla struttura di un modello ingresso-uscita, sia in base alla struttura di un modello in variabili di stato.
- (d) Si consideri il sistema descritto dal modello

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + (1 - \varrho)t^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y^n(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt},$$

dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare, stazionario, dinamico e causale per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$. Motivare la risposta.

- (e) Si consideri il sistema descritto dal modello

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) - \beta t^2 x_2(t) + 5u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \beta e^t x_1(t) + \alpha x_2^3(t) + u(t - 5) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) + (1 - \alpha)u(t) \end{cases}$$

dove α e β sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema lineare, stazionario, dinamico e causale per ogni possibile valore di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Motivare la risposta.

- (f) Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso-uscita

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + \eta y(t) = 3u(t),$$

dove il parametro costante $\eta \in \{17, 65\}$ può assumere due valori e si verifichi che l'evoluzione di tale sistema è caratterizzata, in entrambi i casi, da un modo pseudoperiodico.

- (i) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso e se ne determinino i parametri caratteristici (costante di tempo, pulsazione naturale, coefficiente di smorzamento) per entrambi i valori del parametro η .
 - (ii) Si discuta come il valore di η influisca sullo smorzamento e sul tempo di assestamento.
 - (iii) Si traccino qualitativamente i modi nei due casi.
- (g) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato dal polinomio caratteristico

$$P(s) = (s + 0.5)^3.$$

- (i) Si determinino i modi di tale sistema e i loro parametri caratteristici, calcolando per il modo esponenziale la costante di tempo e per i modi a rampa esponenziale l'eventuale punto di massimo.
- (ii) Si tracci l'andamento qualitativo di tali modi indicando quale fra essi si estingue prima?
- (iii) Si calcoli il tempo di assestamento del modo esponenziale.

(h) Si determini se le seguenti matrici siano diagonalizzabili:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- (i) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato da un polinomio caratteristico con 3 radici distinte, tutte associate a modi stabili e con tempo di assestamento minore di 3 s. Si discuta in che regione del piano complesso cadono tali radici.
- (l) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato da un polinomio caratteristico con 2 coppie di radici complesse e coniugate, entrambe associate a modi stabili e con coefficiente di smorzamento maggiore di 0.5. Si discuta in che regione del piano complesso cadono tali radici.

Esercizio 2. Si considerino due coppie di radici complesse e coniugate

$$p_1, p_1' = -1 \pm j2, \quad p_2, p_2' = -1 \pm j4$$

- (i) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso.
- (ii) Si determinino i modi che ad esse corrispondono, classificandoli e calcolandone i parametri caratteristici (costante di tempo, coefficiente di smorzamento, pulsazione naturale).
- (iii) Si discuta quale dei due modi sia più smorzato e quale dei due abbia il minore tempo di assestamento.
- (iv) Si tracci l'andamento qualitativo dei due modi in funzione del tempo.

Esercizio 3. Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t).$$

- (a) Posto $t_0 = 0$ si determini l'evoluzione libera nel dominio del tempo del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=t_0} = 1, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 1,$$

- (b) Si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle stesse condizioni iniziali del punto precedente assumendo però $t_0 = 3$.

Esercizio 4. È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 3], \quad D = [0]$$

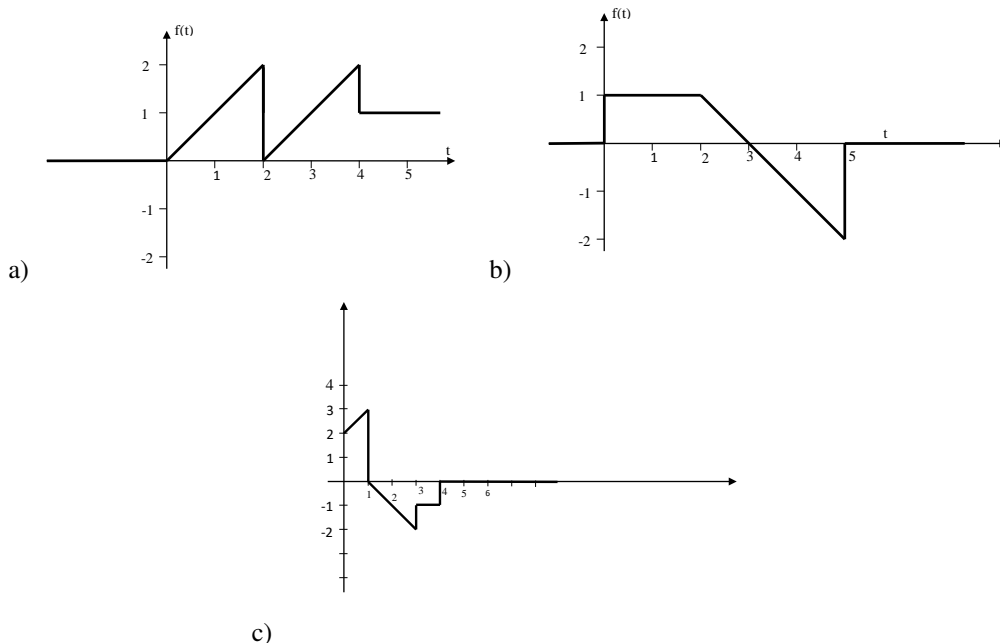
- (a) Si indichi la dimensione dei vettori di ingresso, stato e uscita.

- (b) Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice A .
- (c) Si discuta se esiste una trasformazione di similitudine $x(t) = Pz(t)$ che porta ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale. Si determini la rappresentazione diagonale.
- (d) Si determinino le matrici transizione dello stato per entrambe le rappresentazioni.
- (e) Supposto che lo stato iniziale della rappresentazione diagonale sia $z(0) = [1 \ 1]^T$, si determini, sfruttando le relazioni nel dominio del tempo, l'evoluzione dello stato $z_l(t)$ e dell'uscita $y_l(t)$.
- (f) Si determini lo stato iniziale $x(0)$ della rappresentazione originale che corrisponde allo stato iniziale dato $z(0)$ della rappresentazione diagonale. Si calcoli l'evoluzione libera dello stato $x_l(t)$ e dell'uscita $y_l(t)$ della rappresentazione originale a partire da $x(0)$.
- (g) Le due evoluzioni libere determinate al punto (e) ed (f) coincidono? Perché?

Esercizio 5. Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni del tempo:

1. $3e^{-4t} \delta_{-1}(t)$
2. $(t - 3) \delta_{-1}(t)$
3. $(t + 2)^2 e^t \delta_{-1}(t)$
4. $6t^3 + 5) \delta_{-1}(t)$
5. $t^2 \delta_{-1}(t) + 2\delta_{-1}(t - 2) - (t - 4)\delta_{-1}(t - 4)$
6. $\frac{1}{2}(e^{5t} + e^{-3t}) \delta_{-1}(t)$

Esercizio 6. Trasformare secondo Laplace le seguenti funzioni assegnate graficamente:



Esercizio 7. Verificare il teorema del valore finale per la funzione $f(t) = (2 - e^{-3t}) \delta_{-1}(t)$.

Esercizio 8. Antitrasformare le seguenti funzioni di s :

$$\text{a) } F(s) = \frac{2s + 5}{s^3 + 6s^2 + 21s + 26} \quad (p_1 = -2)$$

$$\text{b) } F(s) = \frac{s^2 + 4s}{(s + 2)^3}$$

$$\text{c) } F(s) = \frac{2s^3 + 5s^2 + 7s + 6}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} \quad (p_1 = -1)$$

Esercizio 9. Si consideri il sistema lineare e stazionario già analizzato nell'Esercizio 3 e descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t).$$

(a) Si determini mediante l'uso delle trasformate di Laplace l'evoluzione $y(t)$ per $t \geq 0$ a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=t_0} = 1, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 1,$$

e supponendo che il segnale in ingresso $u(t)$ valga $3t \delta_{-1}(t)$. Si indichi il termine che corrisponde all'evoluzione libera e alla evoluzione forzata e si tracci l'andamento di tali segnali.

(b) Si verifichi che l'evoluzione libera coincida con quella determinata al punto (a) dell'Esercizio 3.

Esercizio 10. È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati, già analizzata nell'Esercizio 4,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 3], \quad D = [0]$$

(a) Si determini la matrice risolvibile del sistema.

(b) Si determini la matrice transizione dello stato sfruttando le trasformate di Laplace.

(c) Supposto che lo stato iniziale sia $x(0) = [5 \quad 0]^T$, si determini, sfruttando le trasformate di Laplace, l'evoluzione libera dello stato $x_l(t)$ e dell'uscita $y_l(t)$.

(d) Si verifichi che l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita coincidano con quelle determinate al punto (f) dell'Esercizio 4.

(e) Si determini l'evoluzione forzata dello stato e dell'uscita quando al sistema viene applicato il segnale in ingresso il segnale $u(t) = 5 e^{-2t} \delta_{-1}(t)$.