Elementi di Analisi dei Sistemi
Esercizi prima prova intermedia

Alessandro Giua - giua@unica.it

11/04/2025

Esercizio 1. Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

(a) Si discuta che cosa si intende per modello ingresso-uscita, ricordando che forma esso assume nel caso generale e indicando tutte le grandezze che lo caratterizzano.

(b) Si discuta che cosa si intende per modello in variabili di stato, ricordando che forma esso assume nel caso generale e indicando tutte le grandezze che lo caratterizzano.

(c) Si discuta che cosa si intende per *sistema dinamico* e si ricordi come tale proprietà possa verificarsi sia in base alla struttura di un modello ingresso-uscita, sia in base alla struttura di un modello in variabili di stato.

(d) Si consideri il sistema descritto dal modello

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1-\varrho)t^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y^{\eta}(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\frac{du(t)}{dt},$$

dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare, stazionario, dinamico e causale per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$. Motivare la risposta.

(e) Si consideri il sistema descritto dal modello

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = \alpha x_1(t) - \beta t^2 x_2(t) + 5u(t) \\ \dot{x_2}(t) = \beta e^t x_1(t) + \alpha x_2^3(t) + u(t-5) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) + (1-\alpha)u(t) \end{cases}$$

dove α e β sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema lineare, stazionario, dinamico e causale per ogni possibile valore di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Motivare la risposta.

(f) Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso-uscita

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + \eta y(t) = 3u(t),$$

dove il parametro costante $\eta \in \{17, 65\}$ può assumere due valori e si verifichi che l'evoluzione di tale sistema è caratterizzata, in entrambi i casi, da un modo pseudoperiodico.

(i) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso e se ne determinino i parametri caratteristici (costante di tempo, pulsazione naturale, coefficiente di smorzamento) per entrambi i valori del parametro η.

(ii) Si discuta come il valore di η influisca sullo smorzamento e sul tempo di assestamento.

(iii) Si traccino qualitativamente i modi nei due casi.

(g) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato dal polinomio caratteristico

$$P(s) = (s+0.5)^3.$$

(i) Si determinino i modi di tale sistema e i loro parametri caratteristici, calcolando per il modo esponenziale la costante di tempo e per i modi a rampa esponenziale l'eventuale punto di massimo.

(ii) Si tracci l'andamento qualitativo di tali modi indicando quale fra essi si estingue prima?

(iii) Si calcoli il tempo di assestamento del modo esponenziale.

(h) Si determini se le seguenti matrici siano diagonalizzabili:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

(i) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato da un polinomio caratteristico con 3 radici distinte, tutte associate a modi stabili e con tempo di assestamento minore di 3 s. Si discuta in che regione del piano complesso cadono tali radici.

(l) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato da un polinomio caratteristico con 2 coppie di radici complesse e coniugate, entrambe associate a modi stabili e con coefficiente di smorzamento maggiore di 0.5. Si discuta in che regione del piano complesso cadono tali radici.

Esercizio 2. Si considerino due coppie di radici complesse e coniugate

$$p_1, p_1' = -1 \pm j2, \qquad p_2, p_2' = -1 \pm j4$$

(i) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso.

(ii) Si determinino i modi che ad esse corrispondono, classificandoli e calcolandone i parametri caratteristici (costante di tempo, coefficiente di smorzamento, pulsazione naturale).

(iii) Si discuta quale dei due modi sia più smorzato e quale dei due abbia il minore tempo di assestamento.

(iv) Si tracci l'andamento qualitativo dei due modi in funzione del tempo.

Esercizio 3. Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t).$$

(a) Posto $t_0 = 0$ si determini l'evoluzione libera nel dominio del tempo del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=t_0} = 1, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = 1,$$

(b) Si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle stesse condizioni iniziali del punto precedente assumendo però $t_0 = 3$.

Esercizio 4. È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

(a) Si indichi la dimensione dei vettori di ingresso, stato e uscita.

(b) Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice A.

(c) Si discuta se esiste una trasformazione di similitudine $x(t) = Pz(t)$ che porta ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale. Si determini la rappresentazione diagonale.

(d) Si determinino le matrici transizione dello stato per entrambe le rappresentazioni.

(e) Supposto che lo stato iniziale della rappresentazione diagonale sia $z(0) = [1\ \ 1]^T$, si determini, sfruttando le relazioni nel dominio del tempo, l'evoluzione dello stato $z_l(t)$ e dell'uscita $y_l(t)$.

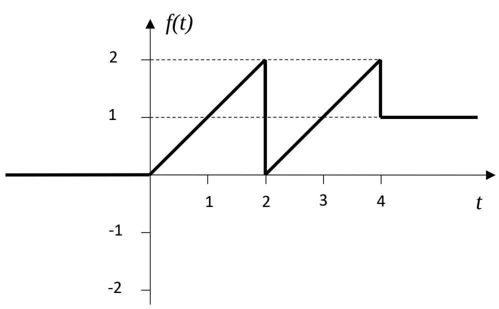
(f) Si determini lo stato iniziale $x(0)$ della rappresentazione originale che corrisponde allo stato iniziale dato $z(0)$ della rappresentazione diagonale. Si calcoli l'evoluzione libera dello stato $x_l(t)$ e dell'uscita $y_l(t)$ della rappresentazione originale a partire da $x(0)$.

(g) Le due evoluzioni libere determinate al punto (e) ed (f) coincidono? Perché?

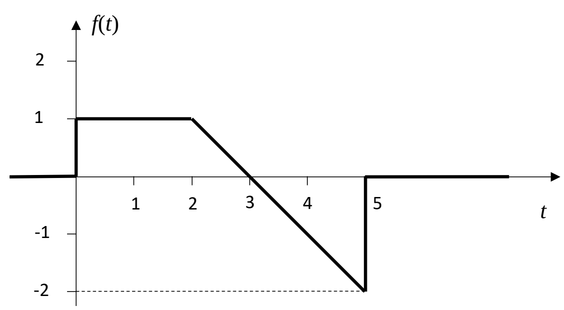
Esercizio 5. Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni del tempo:

1. $3e^{-4t}\,\delta_{-1}(t)$
2. $(t-3)\,\delta_{-1}(t)$
3. $(t+2)^2 e^t\,\delta_{-1}(t)$
4. $6t^3+5)\delta_{-1}(t)$
5. $t^2\delta_{-1}(t) + 2\delta_{-1}(t-2) - (t-4)\delta_{-1}(t-4)$
6. $\frac{1}{2}(e^{5t} + e^{-3t}\delta_{-1}(t)$

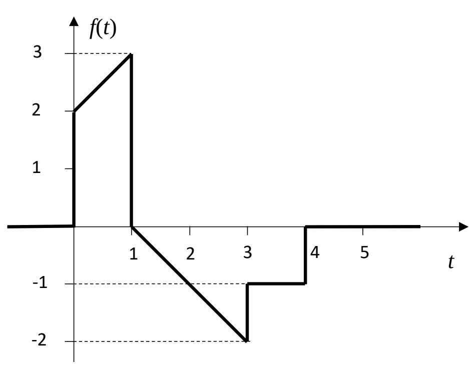
Esercizio 6. *Trasformare secondo Laplace le seguenti funzioni assegnate graficamente:*



a)



b)



c)

Esercizio 7. Verificare il teorema del valore finale per la funzione $f(t) = (2 - e^{-3t})\ \delta_{-1}(t)$.

Esercizio 8. Antitrasformare le seguenti funzioni di s:

a) $F(s) = \dfrac{2s+5}{s^3+6s^2+21s+26}$ $\qquad (p_1 = -2)$

b) $F(s) = \dfrac{s^2+4s}{(s+2)^3}$

c) $F(s) = \dfrac{2s^3+5s^2+7s+6}{s^3+5s^2+8s+4}$ $\qquad (p_1 = -1)$

Esercizio 9. Si consideri il sistema lineare e stazionario già analizzato nell'Esercizio 3 e descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t).$$

(a) Si determini mediante l'uso delle trasformate di Laplace l'evoluzione y(t) per $t \geq 0$ a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=t_0} = 1, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = 1,$$

e supponendo che il segnale in ingresso $u(t)$ valga $3t\ \delta_{-1}(t)$. Si indichi il termine che corrisponde all'evoluzione libera e alla evoluzione forzata e si tracci l'andamento di tali segnali.

(b) Si verifichi che l'evoluzione libera coincida con quella determinata al punto (a) dell'Esercizio 3.