Elementi di Analisi dei Sistemi
Soluzione esercizi prima prova intermedia

Gianluca Mereu, Alessandro Giua
{gianluca.mereu,giua}@diee.unica.it

07/04/2017

Soluzione Esercizio 1. *Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.*

(a) *Si discuta che cosa si intende per modello ingresso-uscita, ricordando che forma esso assume nel caso generale e indicando tutte le grandezze che lo caratterizzano.*

(b) *Si discuta che cosa si intende per modello in variabili di stato, ricordando che forma esso assume nel caso generale e indicando tutte le grandezze che lo caratterizzano.*

(c) *Si discuta che cosa si intende per* sistema dimanico *e si ricordi come tale proprietà possa verificarsi sia in base alla struttura di un modello ingresso-uscita, sia in base alla struttura di un modello in variabili di stato.*

Vedasi libro di testo.

(d) *Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso uscita*

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1-\varrho)t^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y^\eta(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\frac{du(t)}{dt},$$

dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare, stazionario, dinamico e causale per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$. Motivare la risposta.

- Il modello rappresenta un sistema **lineare** per $\eta = 1$ e per ogni $\varrho \in \mathbb{R}$. Se $\eta \neq 1$, il termine y^η è non lineare.
- Il sistema è **dinamico** per ogni $\eta, \varrho, \in \mathbb{R}$ poiché il modello è sempre un'equazione differenziale.
- Il sistema è **stazionario** per $\varrho = 1$ e per ogni $\forall \eta \in \mathbb{R}$. Se $\varrho \neq 1$ il coefficiente $(1-\varrho)t^2$ del termine $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ dipende dal tempo.
- Sistema a **parametri concentrati** per ogni $\eta, \varrho, \in \mathbb{R}$ poiché il modello non consiste in equazioni alle derivate parziali.
- Il sistema è privo di elementi di ritardo per ogni $\eta, \varrho, \in \mathbb{R}$.
- Il sistema è inoltre **strettamente proprio** (causale) per ogni $\eta, \varrho, \in \mathbb{R}$, in quanto l'ordine di derivazione dell'uscita è sempre maggiore dell'ordine di derivazione dell'ingresso.

(e) *Si consideri il sistema descritto dal modello in variabili di stato*

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = \alpha x_1(t) - \beta t^2 x_2(t) + 5u(t) \\ \dot{x_2}(t) = \beta e^t x_1(t) + \alpha x_2^3(t) + u(t-5) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) + (1-\alpha)u(t) \end{cases}$$

dove α e β sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema lineare, stazionario, dinamico e causale per ogni possibile valore di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Motivare la risposta.

- Il modello rappresenta un sistema **lineare** per $\alpha = 0$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \neq 0$ il termine $\alpha x_2^3(t)$ nella seconda equazione di stato è non lineare.

- Il sistema è **dinamico** per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: il vettore di stato non ha mai zero componenti.
- Il sistema è **stazionario** per $\beta = 0$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\beta \neq 0$ i termini $-\beta t^2 x_2(t)$ nella prima equazione di stato e $\beta e^t x_1(t)$ nella seconda rendono il sistema tempovariante.
- Nel sistema è presente un elemento che introduce un ritardo di $T = 5$: vedi teminine $u(t-5)$ nella seconda equazione di stato.
- Sistema a **parametri concentrati** poiché il vettore di stato ha dimensione finita.
- Un sistema espresso da un modello in Variabili di Stato è sempre proprio (causale), strettamente proprio se la trasformazione d'uscita non dipende dall'ingresso. In questo caso se $\alpha = 1$ ed il sistema è **strettamente proprio**.

(f) *Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso-uscita*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + \eta y(t) = 3u(t),$$

dove il parametro costante $\eta \in \{17, 65\}$ può assumere due valori e si verifichi che l'evoluzione di tale sistema è caratterizzata, in entrambi i casi, da un modo pseudoperiodico.

(i) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso e se ne determinino i parametri caratteristici (costante di tempo, pulsazione naturale, coefficiente di smorzamento) per entrambi i valori del parametro η.

- Caso $\eta = 17$
  Polinomio caratteristico: $P(s) = s^2 + 2s + 17$
  Radici: $p, p' = -1 \pm j4$
  Costante di tempo: $\tau = 1\ s$
  Pulsazione naturale: $\omega_n = 4.1\ rad/s$
  Coeff. di smorzamento: $\zeta = 0.24\ rad^{-1}$.
- Caso $\eta = 65$
  Polinomio caratteristico: $P(s) = s^2 + 2\ s + 65$
  Radici: $p, p' = -1 \pm j8$
  Costante di tempo $\tau = 1\ s$
  Pulsazione naturale $\omega_n = 8.1\ rad/s$
  Coeff. di smorzamento $\zeta = 0.12\ rad^{-1}$

(ii) *Si discuta come il valore di η influisca sullo smorzamento e sul tempo di assestamento.*
Il tempo di assestamento vale 3τ e non varia al variare di η.

(iii) *Si traccino qualitativamente i modi nei due casi.*
Il modo più smorzato è quello con $\eta = 17$, può osservarsi dai grafici mostrati in Figura 1.

(g) *Un modello ingresso-uscita è caratterizzato dal polinomio caratteristico*

$$P(s) = (s + 0.5)^3.$$

(i) Si determinino i modi di tale sistema e i loro parametri caratteristici, calcolando per il modo esponenziale la costante di tempo e per i modi a rampa esponenziale l'eventuale punto di massimo.

Determiniamo innanzitutto le radici del polinomio caratteristico:

$P(s) = 0 \ \Rightarrow p = \alpha = -0.5 \quad \nu = 3$
Alle tre radici sono associati i seguenti modi aperiodici stabili: $e^{-t/2},\ t\,e^{-t/2},\ t^2\,e^{-t/2}$

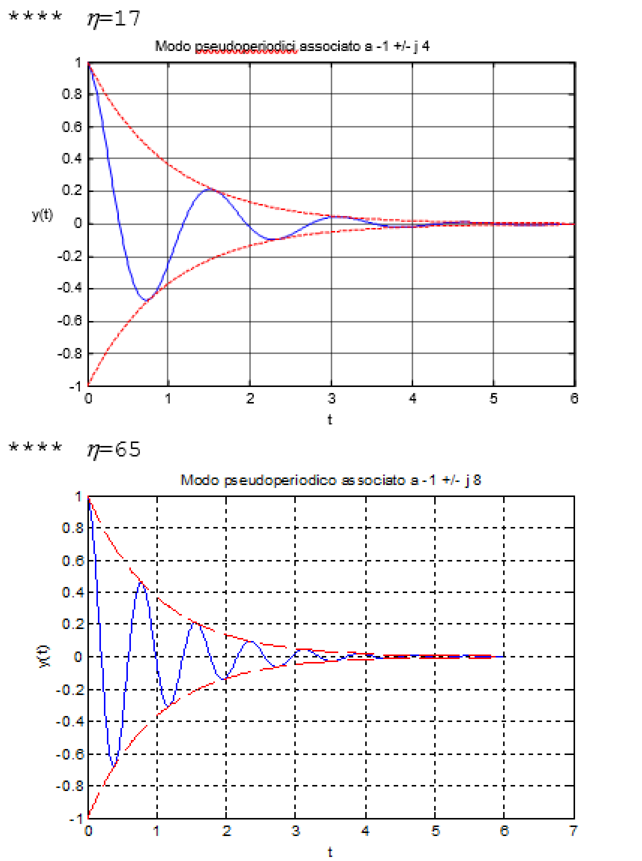


Figura 1: Modi pseudoperiodici associati a $\eta = 17$ ed $\eta = 65$.

Determiniamo la costante di tempo τ:

$$\alpha = -0.5 \;\; \Rightarrow \;\; \tau = -\frac{1}{\alpha} = 2$$

Il modo $t\ e^{-t/2}$ ha un massimo per $t = \tau = 2$
Il modo $t^2\ e^{-t/2}$ ha un massimo per $t = 2\,\tau = 4$

(ii) *Si tracci l'andamento qualitativo di tali modi indicando quale fra essi si estingue prima?*

I grafici dei tre modi sono mostrati in Figura 2. Si estingue prima il modo $e^{-t/2}$ perché per $t > 1$ vale necessariamente $e^{-t/2} < te^{-t/2} < t^2 e^{-t/2}$.

(iii) *Si calcoli il tempo di assestamento del modo esponenziale.*

Il modo $e^{-t/2}$ ha tempo di assestamento al 5% pari a $t_a = 3\,\tau = 6$

(h) *Si determini se le seguenti matrici siano diagonalizzabili:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- A_1: la matrice ha autovalori distinti di conseguenza sarà possibile determinare una base di autovettori che costituisce la matrice modale che permette di diagonalizzare il sistema.

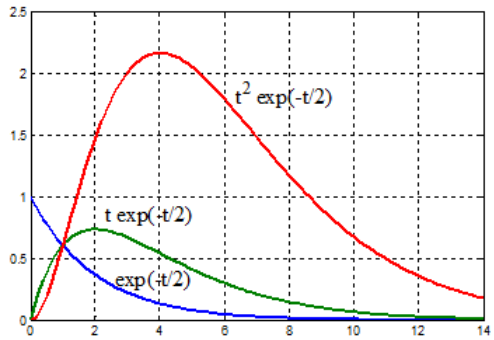


Figura 2

- A_2: la matrice ha un unico autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità $\nu = 2$, di conseguenza non si può determinare a priori se il sistema sia diagonalizzabile o meno. Si dovrà verificare quanti autovettori indipendenti è possibile associare all'autovalore con molteplicità maggiore di uno:

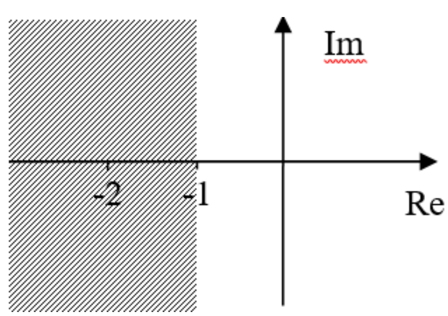
  - $A\, v_1 = \lambda_1\, v_1 \quad (A - \lambda_1 I)v_1 = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\, v_a - 2\, v_b = 0 \\ 2\, v_a + 2\, v_b = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

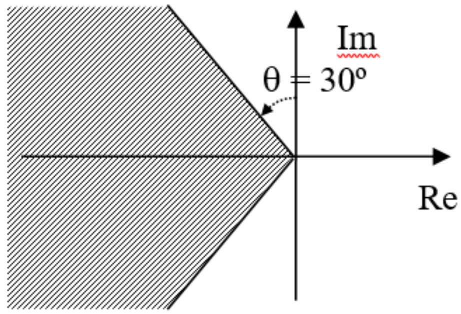
Non è possibile determinare due autovettori indipendenti percio non è possibile diagonalizzare il sistema.

(i) *Un modello ingresso-uscita è caratterizzato da un polinomio caratteristico con 3 radici distinte, tutte associate a modi stabili e con tempo di assestamento minore di 3 s. Si discuta in che regione del piano complesso cadono tali radici.*
$t_{a5\%} = 3\tau < 3; \Rightarrow \tau < 1$
$\tau = \frac{-1}{\alpha} < 1 \;\; (NB : \alpha < 0) \;\; \Rightarrow \alpha < -1$



(l) *Un modello ingresso-uscita è caratterizzato da un polinomio caratteristico con 2 coppie di radici complesse e coniugate, entrambe associate a modi stabili e con coefficiente di smorzamento maggiore di* 0.5. *Si discuta in che regione del piano complesso cadono tali radici.*

$\zeta = sin(\theta) > 0.5; \;\; \Rightarrow \theta > 30$ gradi.

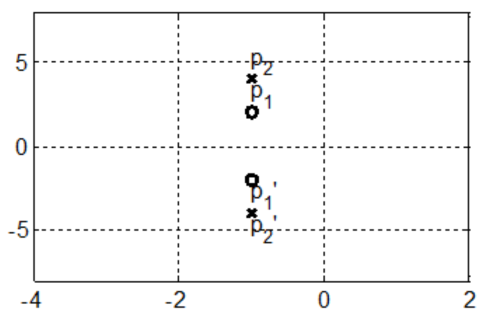


Soluzione Esercizio 2. *Si considerino due coppie di radici complesse e coniugate*

$$p_1, p_1' = -1 \pm j2, \qquad p_2, p_2' = -1 \pm j4$$

(l) Si rappresentino le radici nel piano complesso.

$$p_1, p_1' = \alpha_1 \pm j\omega_1 = -1 \pm j2$$
$$p_2, p_2' = \alpha_2 \pm j\omega_2 = -1 \pm j4$$



(ii) *Si determinino i modi che ad esse corrispondono, classificandoli e calcolandone i parametri caratteristici (costante di tempo, coefficiente di smorzamento, pulsazione naturale).*

Ad ogni coppia di radici complesse e coniugate corrisponde un modo pseudoperiodico: $e^{-\alpha t}\ \cos(\omega t)$. Dato che la parte reale di ogni coppia è $\alpha < 0$ tali modi saranno stabili.

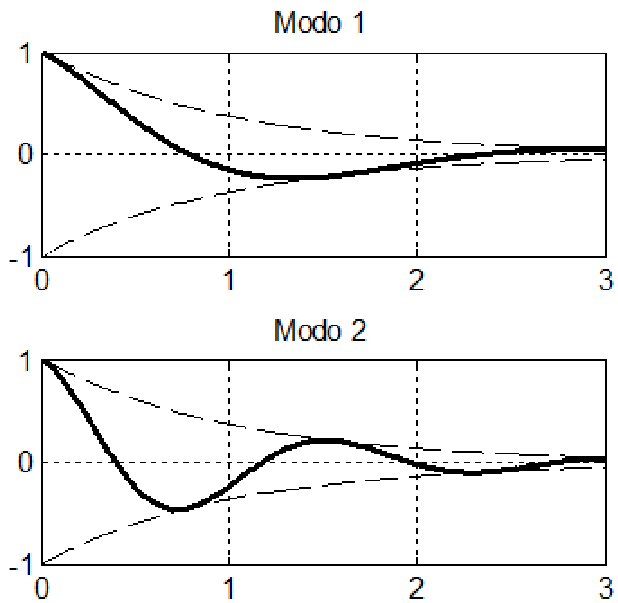
Costante di tempo: $\tau_1 = 1.00$; $\tau_2 = 1.00$
Coeff. smorzamento: $\zeta_1 = 0.45$; $\zeta_2 = 0.24$
Pulsazione naturale: $\omega_{n,1} = 2.24$; $\omega_{n,2} = 4.12$

(iii) *Si discuta quale dei due modi sia più smorzato e quale dei due abbia il minore tempo di assestamento.*

Il modo più smorzato è il primo, perché $\zeta_1 < \zeta_2$.

I due modi hanno lo stesso tempo di assestamento, perché $\tau_1 = \tau_2$.

(iv) *Si tracci l'andamento qualitativo dei due modi in funzione del tempo.*



Soluzione Esercizio 3. *Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita*

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t).$$

(a) Posto $t_0 = 0$ si determini l'evoluzione libera nel dominio del tempo del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=t_0} = 1, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = 1.$$

Per determinare l'evoluzione libera nel dominio del tempo è necessario individuare la corretta forma dell'evoluzione libera, data da una combinazione lineare dei modi del sistema, calcolarne le sue $n-1$ derivate e, imponendo le condizioni al contorno, determinare i parametri caratteristici dell'evoluzione libera.

Il primo passo è determinare il polinomio caratteristico e le sue radici:

$$P(s) = 2s^2 + 4s + 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{radice } p = -1 \text{ di molteplicità } \nu = 2$$

a cui corrispondono i modi e^{-t} e te^{-t}.

La forma dell'evoluzione libera sarà:

$$y_\ell(t) = A_1\, e^{-t} + A_2\, te^{-t},$$

la sua derivata prima vale:

$$\frac{dy_\ell(t)}{dt} = -A_1\, e^{-t} + A_2\, e^{-t} - A_2\, t\, e^{-t}.$$

Ora imponendo le condizioni iniziali fornite dal testo $y_\ell(0) = 1$ e $\dot{y}_\ell(0) = 1$ si ottiene:

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ -A_1 + A_2 = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori appena determinati nell'espressione generale dell'evoluzione libera si ottiene il risultato cercato.

$$y_\ell(t) = \left(e^{-t} + 2t\, e^{-t}\right)\ \delta_{-1}(t)$$

(b) *Si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle stesse condizioni iniziali del punto precedente assumendo però $t_0 = 3$.*

La proprietà di stazionarietà del sistema ci permette di affermare che l'evoluzione libera, a partire dalle stesse condizioni iniziali, si ottiene traslando l'evoluzione libera determinata per $t_0 = 0$ nel nuovo istante iniziale $t_0 = 3$.

$$y_\ell(t) = \left(e^{-(t-3)} + 2(t-3)e^{-(t-3)}\right)\ \delta_{-1}(t-3)$$

Soluzione Esercizio 4. *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

(a) Si indichi la dimensione dei vettori di ingresso, stato e uscita.

$r = 1$ ingressi
$n = 2$ stati
$q = 1$ uscita

(b) Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice A.

Autovalori:

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -2$$

Autovettori:

$$v_1 = [3 \quad 2]^T \quad v_2 = [1 \quad -1]^T$$

(c) Si discuta se esiste una trasformazione di similitudine $x(t) = Pz(t)$ che porta ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale. Se possibile si determini la rappresentazione diagonale.

La matrice di ordine 2 ha due autovalori distinti e dunque due autovettori linearmente indipendenti. Essa può quindi essere diagonalizzata mediante la matrice modale

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{la cui inversa vale} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & -0.6 \end{bmatrix}.$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \qquad B' = P^{-1}B = [0.6 \quad 0.2]^T; \qquad C' = CP = [6 \quad -3]; \qquad D' = D = 0.$$

(d) Si determinino le matrici di transizione dello stato per entrambe le rappresentazioni.

$$e^{A't} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}; \qquad e^{At} = P\, e^{A't}\, P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2\,e^{-2t} + 3\,e^{3t} & -3\,e^{-2t} + 3\,e^{3t} \\ -2\,e^{-2t} + 2\,e^{3t} & 3\,e^{-2t} + 2\,e^{3t} \end{bmatrix}.$$

(e) Supposto che lo stato iniziale della rappresentazione diagonale sia $z(0) = [1 \quad 1]^T$, si determini, sfruttando le relazioni nel dominio del tempo, l'evoluzione dello stato $z_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$.

$$z_\ell(t) = e^{A't}\, z(0) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}; \qquad y_\ell(t) = C'\, z_\ell(t) = 6\,e^{3t} - 3\,e^{-2t}.$$

(f) Si determini lo stato iniziale $x(0)$ della rappresentazione originale che corrisponde allo stato iniziale dato $z(0)$ della rappresentazione diagonale. Si calcoli l'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$ della rappresentazione originale a partire da $x(0)$.

$x(0) = P\, z(0) = [4 \;\; 1]^T$

$$x_\ell(t) = e^{At}\, x(0) = \begin{bmatrix} e^{-2t} + 3e^{3t} \\ -e^{-2t} + 2e^{3t} \end{bmatrix}; \qquad y_\ell(t) = C\, x_\ell(t) = 6\, e^{3t} - 3\, e^{-2t}.$$

(g) *Le due evoluzioni libere determinate al punto (e) ed (f) coincidono? Perché?*

Sono due rappresentazioni dello stesso sistema, le evoluzioni libere dello stato sono diverse ma le evoluzioni libere dell'uscita sono correttamente coincidenti.

Soluzione Esercizio 5. *Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni del tempo:*

1. $f_1(t) = 3e^{-4t}\, \delta_{-1}(t)$

   $$F_1(s) = \frac{3}{s+4}$$

   $$\boxed{\mathcal{L}[e^{at}\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s-a}}$$

2. $f_2(t) = (t-3)\, \delta_{-1}(t) \; = \; t\delta_{-1}(t) - 3\delta_{-1}(t)$

   $$F_2(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s} = \frac{1-3s}{s^2}$$

   $$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{s^{k+1}} \; con\; k = 0, 1}$$

3. $f_3(t) = (t+2)^2 e^t\, \delta_{-1}(t) \;\; = \;\; (t^2e^t + 4te^t + 4e^t)\, \delta_{-1}(t)$

   $$F_3(s) = \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{4}{s-1}$$

   $$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}e^{at}\, \delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{(s-a)^{k+1}} \; con: \; \begin{array}{l} a = 1; \\ k = 0, 1, 2 \end{array}}$$

4. $f_4(t) = 6t^3 + 5)\, \delta_{-1}(t)$

   $$F_4(s) = \frac{36}{s^4} + \frac{5}{s}$$

   $$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}e^{at}\, \delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{(s)^{k+1}} \; con: \;\; k = 3}$$

5. $f_5(t) = t^2\delta_{-1}(t) + 2\delta_{-1}(t-2) - (t-4)\delta_{-1}(t-4)$

   $$F_5(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-4s}$$

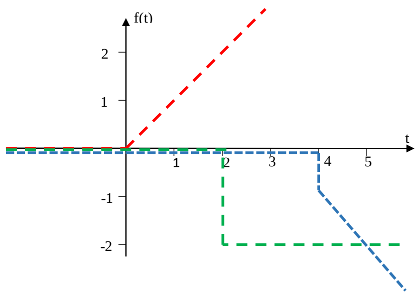
   $$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}[t\; \delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}[\frac{t^k}{k!}\; \delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s^{k+1}} \\ \mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-Ts}F(s) \end{array}}$$

6. $f_6(t) = \dfrac{1}{2}(e^{5t} + e^{-3t})\, \delta_{-1}(t)$

   $$F_6(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s-5)} + \frac{1}{(s+3)}\right]$$

Soluzione Esercizio 6. *Trasformare secondo Laplace le seguenti funzioni assegnate graficamente:*

a) Si può facilmente verificare che la funzione data può essere ottenuta come somma delle funzioni elementari mostrate nella figura seguente:



$$f_a(t) = t\delta_{-1}(t) - 2\delta_{-1}(t-2) - (t-3)\delta_{-1}(t-4) =$$

$$f_a(t) = t\delta_{-1}(t) - 2\delta_{-1}(t-2) - (t-3-1+1)\delta_{-1}(t-4) =$$

$$f_a(t) = t\delta_{-1}(t) - 2\delta_{-1}(t-2) - (t-4)\delta_{-1}(t-4) - \delta_{-1}(t-4) =$$

la cui trasformata vale:

$$F_a(s) = \mathcal{L}[f_a(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-4s} - \frac{1}{s}e^{-4s}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}[t\,\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-Ts}F(s) \end{array}}$$

b) $f_b(t) = \delta_{-1}(t) - (t-2)\delta_{-1}(t-2) + (t-3)\delta_{-1}(t-5) =$

$\delta_{-1}(t) - (t-2)\delta_{-1}(t-2) + (t-3+2-2)\delta_{-1}(t-5) =$

$\delta_{-1}(t) - (t-2)\delta_{-1}(t-2) + (t-5)\delta_{-1}(t-5) + 2\delta_{-1}(t-5)$

$$F_b(s) = \mathcal{L}[f_b(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-5s} + 2e^{-5s}$$

c) $f_c(t) = 2\delta_{-1}(t) + t\delta_{-1}(t) - 2(t+1/2)\delta_{-1}(t-1) + (t-2)\delta_{-1}(t-3) + \delta_{-1}(t-4) =$

$f_c(t) = 2\delta_{-1}(t) + t\delta_{-1}(t) - 2(t+1/2-3/2+3/2)\delta_{-1}(t-1) + (t-2-1+1)\delta_{-1}(t-3) + \delta_{-1}(t-4) =$

$f_c(t) = 2\delta_{-1}(t) + t\delta_{-1}(t) - 2(t-1)\delta_{-1}(t-1) - 3\delta_{-1}(t-1) + (t-3)\delta_{-1}(t-3) + \delta_{-1}(t-3) + \delta_{-1}(t-4)$

$$F_c(s) = \mathcal{L}[f_c(t)] = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} - \frac{3}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{1}{s}e^{-3s} + \frac{1}{s}e^{-4s}$$

Soluzione Esercizio 7. *Verificare il teorema del valore finale per la funzione* $f(t) = (2 - e^{-3t})\,\delta_{-1}(t)$.

Il *Teorema del valore finale*[1] afferma che se esiste finito il $\lim_{t\to\infty} f(t)$ allora

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s).$$

Quindi è possibile applicare il teorema solo se esiste finito il $\lim_{t\to\infty} f(t)$, come nel caso in esame.

Calcoliamo:

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+3} \quad = \quad \frac{s+6}{s(s+3)}$$

e verifichiamo che vale effettivamente:

$$\lim_{s\to 0} s\,F(s) \quad = \quad \lim_{s\to 0} \frac{s+6}{s+3} \quad = \quad \frac{6}{3} \quad = \quad 2 \quad = \quad \lim_{t\to\infty} (2 - e^{-3t}).$$

Soluzione Esercizio 8. *Antitrasformare le seguenti funzioni di s:*

a) $F(s) = \dfrac{2s+5}{s^3+6s^2+21s+26}$

Per calcolare l'antitrasformata dobbiamo innanzitutto determinare le radici del polinomio al denominatore, una delle radici ($p_1 = -2$) è data dal testo. Dividiamo quindi il denominatore per $(s+2)$:

$$\begin{array}{r|l}
s^3+6s^2+21s+26 & s+2 \\ \hline
-s^3-2s^2 & s^2+4s+13 \\ \hline
4s^2+21s+26 & \\
-4s^2-8s & \\ \hline
13s+26 & \\
-13s-26 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$s^2+4s+13 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} p_2 = -2+3i \\ p_2' = -2-3i \end{cases}$$

$F(s) = \dfrac{2s+5}{(s+2)(s^2+4s+13)} = \dfrac{R_1}{s+2} + \dfrac{R_2}{s-(-2+3i)} + \dfrac{R_2'}{s-(-2-3i)}$ dove R_i' è il complesso coniugato di R_i.

Passiamo ora al calcolo dei residui; la $F(s)$ è una funzione razionale strettamente propria e le radici del polinomio al denominatore hanno tutte molteplicità unitaria, pertanto:

$$R_i = \lim_{s\to p_i} (s-p_i)F(s)$$

- $R_1 = \lim_{s\to -2} (s+2)\dfrac{2s+5}{(s+2)(s^2+4s+13)} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{-4+5}{4-8+13} \quad = \quad \dfrac{1}{9}$
- $R_2 = \lim_{s\to -2+3i} (s-(-2+3i))\dfrac{2s+5}{(s+2)(s-(-2+3i))(s-(-2-3i))} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2(-2+3i)+5}{((-2+3i)+2)(-2+3i+2+3i)} \quad = \quad \dfrac{1+6i}{-18}$

[1] pag. 147 del libro di testo

$|R_2| = \frac{\sqrt{37}}{18}; \qquad \phi = arctg(6-\pi)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_1}{s-p_1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_2}{s-p_2} + \frac{R_2'}{s-p_2'}\right] = \left[R_1 e^{-p_1 t} + 2|R_2|e^{\alpha t}\ \cos(\omega t + \phi)\right]\ \delta_{-1}(t)$$

$$\boxed{f(t) = \left[\frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{\sqrt{37}}{9}e^{-2t}\cos(3t+\phi)\right]\ \delta_{-1}(t)}$$

b) $F(s) = \dfrac{s^2+4s}{(s+2)^3} \quad = \quad \dfrac{R_0}{(s+2)} + \dfrac{R_1}{(s+2)^2} + \dfrac{R_2}{(s+2)^3}$

Funzione razionale strettamente propria avente un polo con molteplicità $\nu = 3$.

$$R_{i,\nu_i - j} = \lim_{s\to p_i} \frac{1}{(j-i)!}\ \frac{d^{j-i}}{ds^{j-i}}\ (s-p_i)^{\nu_i}\ F(s)$$

- $R_0 = \lim_{s\to -2}\left(\frac{1}{2!}\ \frac{d^2}{ds^2}\left[(s+2)^3\ \frac{s^2+4s}{(s+2)^3}\right]\right) = \lim_{s\to -2}\left(\frac{1}{2}\ \frac{d^2}{ds^2}\ [s^2+4s]\right) = \frac{1}{2}\ 2 \quad = \quad \boxed{1}$
- $R_1 = \lim_{s\to -2}\left(\frac{1}{1!}\ \frac{d}{ds}\left[(s+2)^3\ \frac{s^2+4s}{(s+2)^3}\right]\right) = \lim_{s\to -2}\left(\frac{d}{ds}\ [s^2+4s]\right) \ = \ 2 \ = \ \lim_{s\to -2}(2s+4) \ = \ \boxed{0}$
- $R_3 = \lim_{s\to -2}\left((s+2)^3\ \frac{s^2+4s}{(s+2)^3}\right) \ = \ 4-8 \ = \ \boxed{-4}$

$F(s) = \dfrac{-4}{(s+2)^3} + \dfrac{1}{(s+2)}$

$$f(t) = \left(-4\ e^{-2t}\frac{t^2}{2} + e^{-2t}\right) = \boxed{(-2t^2+1)e^{-2t}\ \delta_{-1}(t)}$$

c) $F(s) = \dfrac{2s^3+5s^2+7s+6}{s^3+5s^2+8s+4}$ $\qquad (p_1 = -1)$

La $F(s)$ non è una funzione strettamente propria, la $f(t)$ di conseguenza avrà un termine impulsivo.
Dividiamo il numeratore per il denominatore per porre la F(s) nella forma: $F(s) = K' + F'(s)$

$$\begin{array}{r||l} 2s^3 + \ \ 5s^2 + \ \ 7s + 6 & s^3+5s^2+8s+4 \\ \hline\hline -2s^3 + 10s^2 - 16s - 8 & 2 \\ \hline -5s^2 - \ \ 9s - 8 & \end{array}$$

$F(s) = K' + F'(s) \ = 2 - \dfrac{5s^2+9s+8}{s^3+5s^2+8s+4}$

Ci preoccupiamo ora di determinare l'antitrasformata della funzione razionale strettamente propria $F'(s)$, uno dei suoi poli è $(p_1 = -1)$, come dato dal testo.

$$
\begin{array}{r||l}
s^3 + 5s^2 + 8s + 4 & s+1 \\ \hline
-s^3 - \ \ s^2 \qquad\qquad & s^2 + 4s + 4 \\ \cline{1-1}
4s^2 + 8s + 4 & \\
-4s^2 - 4s \quad & \\ \cline{1-1}
4s + 4 & \\
-4s - 4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad \Rightarrow \qquad (s+2)^2
$$

$$F(s)' = \frac{R_{1,0}}{(s+2)} + \frac{R_{1,1}}{(s+2)^2} + \frac{R_2}{s+1}$$

- $R_{1,0} = \lim_{s \to -2} \left(\frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[(s+2)^2 \frac{5s^2+9s+2}{(s+2)^2(s+1)} \right] \right) = \lim_{s \to -2} \left(\frac{(10s+9)(s+1)-(5s^2+9s+2)}{(s+1)^2} \right) = \boxed{7}$
- $R_{1,1} = \lim_{s \to -2} \left((s+2)^2 \frac{5s^2+9s+2}{(s+2)^2(s+1)} \right) = \frac{20-18+2}{-1} = \boxed{-4}$
- $R_2 = \lim_{s \to -1} \left((s+1) \frac{5s^2+9s+2}{(s+2)^2(s+1)} \right) = \frac{5-9+2}{1} = \boxed{-2}$

$$F(s) = 2 - \frac{7}{(s+2)} + \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{2}{s+1}$$

$$\boxed{f(t) = 2\,\delta(t) + \left(-7\,e^{-2t} + 4t\,e^{-2t} + 2e^{-t}\right)\delta_{-1}(t)}$$

Soluzione Esercizio 9. *Si consideri il sistema lineare e stazionario già analizzato nell'Esercizio 3 e descritto dal seguente modello ingresso-uscita*

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t).$$

(a) i determini mediante l'uso delle trasformate di Laplace l'evoluzione y(t) per t ≥ 0 *a partire dalle condizioni iniziali*

$$y(t)|_{t=t_0} = 1, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = 1,$$

e supponendo che il segnale in ingresso $u(t)$ *valga* $3t\ \delta_{-1}(t)$. *Si indichi il termine che corrisponde all'evoluzione libera e alla evoluzione forzata e si tracci l'andamento di tali segnali.* L'evoluzione totale del sistema sarà dato dalla somma della evoluzione libera e forzata:

$$Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s) = \frac{Q(s)}{D(s)} + \frac{N(s)}{D(s)}U(s)$$

dove con $N(s)$ e $D(s)$ si sono indicati rispettivamente il numeratore e denominatore della funzione di trasferimento. Ricordiamo che la funzione di trasferimento è una funzione razionale si s che ha al numeratore il polinomio $N(s)$ costruito con i coefficienti del secondo membro della equazione differenziale del sistema IU e al denominatore il polimomio $D(s)$ costruito con i coefficienti del primo membro, in questo caso risulta:

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{2s^2 + 4s + 2}$$

Determiniamo per prima la evoluzione libera:

Per determinare il polimonio $Q(s)$ per primo passo si trasforma secondo Laplace l'equazione differenziale data, per un sistema del secondo ordine vale:

$$a_2\, s^2 \;+\; a_1 s \;+\; a_0 \;=\; b_m\, u^m \;+\; \ldots \;+\; b_1\, s \;+\; b_0$$

$$a_2\,(s^2\,Y(s) \;-\; y_0 s \;-\; y_0') + a_1\,(s\,Y(s) \;-\; y_0) + a_0\,Y(s) = \;(b_m\,s^m + \ldots b_1\,s \;+\; b_0)U(s)$$

Sostituendo i valori si ottiene il sistema:

$$2\,(s^2\,Y(s) \;-\; 1s \;-\; 1) + 4\,(s\,Y(s) \;-\; 1) + 2\,Y(s) = \;U(s)$$

Isolando i termini che non dipendono da $Y(s)$ e $U(s)$ e portandoli al secondo membro otteniamo $Q(s)$:

$$2\,s^2\,Y(s) \;+4\,s\,Y(s) \;+2\,Y(s) = \;U(s) + \;2s \;+\;2 + \;4$$

$$Q(s) = 2s + 6$$

Per determinare l'evoluzione libera è necessario antitrasformare la funzione $\frac{Q(s)}{D(s)}$:

$$y_\ell(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{Q(s)}{D(s)}\right] = \frac{2s+6}{2s^2+4s+2} = \frac{R_{1,0}}{2(s+1)^2} + \frac{R_{1,1}}{2(s+1)^2}$$

$$R_{1,1} = \lim_{s\to -1}(s+1)^2\,\frac{2s+6}{2(s+1)^2} = 2$$
$$R_{1,0} = \lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\,\frac{2s+6}{2(s+1)^2}\right] = 1$$

$$y_\ell(t) = (e^{-t} \;+\; 2\,te^{-t})\delta_{-1}(t)$$

Passiamo ora al calcolo della risposta forzata, è necessario trasformare secondo Laplace il segnale in ingresso:

$$U(s) = \mathfrak{L}\,[u(t)] \;=\; \frac{3}{s^2}$$

$$Y_f(s) \;=\; W(s)\,U(s) \;=\; \frac{3}{s^2\,(2\,s^2 + 4\,s + 2)}$$

Determinando la forma residui-poli mediante lo sviluppo di Heaviside ed antitrasformando si trova

$$\left(\frac{3}{2}\,t + 3\,e^{-t} + \frac{3}{2}\,t\,e^{-t} - 3\right)\;\delta_{-1}(t)$$

Soluzione Esercizio 10. *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati, già analizzata nell'Esercizio 4,*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

(a) *Si determini la matrice risolvente del sistema.*

Per definizione la *matrice risolvente* del sistema è la matrice $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s-1 & -3 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$det(sI - A) \;=\; (s-1)(s) - 6 \;=\; s^2 - s - 6 \;=\; (s+2)(s-3)$$

$$(sI - A)^{-1} \;=\; \frac{1}{(s+2)(s-3)} \begin{bmatrix} s & 2 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix}$$

(b) *Si determini la matrice transizione dello stato sfruttando le trasformate di Laplace.*

Grazie alle trasformate di Laplace possiamo determinare la matrice transizione dello stato semplicemente antitrasformando la matrice risolvente determinata al punto precedente:

$$e^{A\,t} = \mathfrak{L}^{-1}[(\mathfrak{sI} - \mathfrak{A})^{-1}] \;=\; \begin{bmatrix} \frac{R_{1,1}}{(s+2)} + \frac{R_{1,2}}{(s-3)} & \frac{R_{2,1}}{(s+2)} + \frac{R_{2,2}}{(s-3)} \\ \\ \frac{R_{3,1}}{(s+2)} + \frac{R_{3,2}}{(s-3)} & \frac{R_{4,1}}{(s+2)} + \frac{R_{4,2}}{(s-3)} \end{bmatrix}$$

- $R_{1,1} = \lim\limits_{s \to -2} (s+2) \dfrac{s}{(s+2)(s-3)} = 2/5$
- $R_{1,2} = \lim\limits_{s \to 3} (s-3) \dfrac{s}{(s+2)(s-3)} = 3/5$
- $R_{2,1} = \lim\limits_{s \to -2} (s+2) \dfrac{2}{(s+2)(s-3)} = -3/5$
- $R_{2,2} = \lim\limits_{s \to 3} (s-3) \dfrac{2}{(s+2)(s-3)} = 3/5$
- $R_{3,1} = \lim\limits_{s \to -2} (s+2) \dfrac{3}{(s+2)(s-3)} = -2/5$
- $R_{3,2} = \lim\limits_{s \to 3} (s-3) \dfrac{3}{(s+2)(s-3)} = 2/5$
- $R_{4,1} = \lim\limits_{s \to -2} (s+2) \dfrac{(s-1)}{(s+2)(s-3)} = 3/5$
- $R_{4,2} = \lim\limits_{s \to 3} (s-3) \dfrac{(s-1)}{(s+2)(s-3)} = 2/5$

$$e^{At} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2\,e^{-2t} + 3\,e^{3t} & -3\,e^{-2t} + 3\,e^{3t} \\ -2\,e^{-2t} + 2\,e^{3t} & 3\,e^{-2t} + 2\,e^{3t} \end{bmatrix}$$

(c) *Supposto che lo stato iniziale sia $x(0) = [5 \quad 0]^T$, si determini sfruttando le trasformate di Laplace, l'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$.* L'evoluzione libera dello stato si determina semplicemente moltiplicando la matrice risolvente per le condizioni iniziali fornite dal testo:

$$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1}\, x(0) \quad = \quad \tfrac{1}{(s+2)(s-3)} \begin{bmatrix} s & 2 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad = \quad \tfrac{1}{(s+2)(s-3)} \begin{bmatrix} 5s \\ 15 \end{bmatrix}$$

Da cui antitrasformando otteniamo l'evoluzione libera dello stato x nel tempo:

$$x_\ell(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X_\ell(s)] = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} + 3e^{3t} \\ -2e^{-2t} + 2e^{3t} \end{bmatrix}$$

A questo punto è più semplice utilizzare l'evoluzione libera dello stato in funzione del tempo, viceversa sarebbe necessario il calcolo di un'ulteriore antitrasformata.

$$y_\ell(t) = C\, x_\ell(t) \;=\; [0 \quad 3] \begin{bmatrix} 2e^{-2t} + 3e^{3t} \\ -2e^{-2t} + 2e^{3t} \end{bmatrix} \delta_{-1}(t) \;=\; (-12e^{-2t} + 15e^{-t})\delta{-1}(t)$$

(d) *Si verifichi che l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita coincidano con quelle determinate al punto (f) dell'Esercizio 4.*

Le due espressioni coincidono

(e) *Si determini l'evoluzione forzata dello stato e dell'uscita quando al sistema viene applicato il segnale in ingresso il segnale $u(t) = 5\, e^{-2t}\delta_{-1}(t)$.*

Per determinare la risposta forzata occorre trasformare secondo Laplace il segnale in ingresso:

$$U(s) = \mathfrak{L}\,[u(t)] \;=\; \frac{5}{s+2}$$

Il valore dell'evoluzione forzata dello stato nella variabile di Laplace si ottiene dalla seguente relazione:

$X_f(s) = (sI - A)^{-1}\, B\, U(s)$

$$X_f(s) = \frac{1}{(s+2)(s-3)} \begin{bmatrix} s & 3 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{5}{s+2} \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{10s+2}{(s+2)^2(s-3)} \\ \frac{29+s}{(s+2)^2(s-3)} \end{bmatrix}$$

Riportando le funzioni in fratti semplici tramite la tecnica dei residui ed antitrasformando si ottiene:

$$x_f(t) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 9\, e^{3t} - 9e^{-2t} + t\, e^{-2t} \\ 6\, e^{3t} - 6e^{-2t} - t\, e^{-2t} \end{bmatrix} \delta_{-1}(t).$$

Per determinare la risposta forzata dell'uscita si può operare direttamente nel tempo per velocizzare i calcoli:

$$y_f(t) = C\,x_f(t) \;=\; [0 \;\; 3]\,\tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 9\,e^{3t} - 9e^{-2t} + t\,e^{-2t} \\ 6\,e^{3t} - 6e^{-2t} - t\,e^{-2t} \end{bmatrix}\delta_{-1}(t) \;\;=\;\; (18/5\,e^{3t} - 18/5\,e^{-2t} - 3/5\,t\,e^{-2t})\,\delta_{-1}(t).$$