

# Elementi di Analisi dei Sistemi

## Soluzione esercizi prima prova intermedia

Gianluca Mereu, Alessandro Giua  
giua@unica.it

12/04/2025

**Soluzione Esercizio 1.** Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

- (a) Si discuta che cosa si intende per modello ingresso-uscita, ricordando che forma esso assume nel caso generale e indicando tutte le grandezze che lo caratterizzano.
- (b) Si discuta che cosa si intende per modello in variabili di stato, ricordando che forma esso assume nel caso generale e indicando tutte le grandezze che lo caratterizzano.
- (c) Si discuta che cosa si intende per sistema dinamico e si ricordi come tale proprietà possa verificarsi sia in base alla struttura di un modello ingresso-uscita, sia in base alla struttura di un modello in variabili di stato.

Vedasi libro di testo.

- (d) Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso uscita

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + (1 - \rho)t^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y^\eta(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt},$$

dove  $\rho$  e  $\eta$  sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare, stazionario, dinamico e causale per ogni possibile valore di  $\rho, \eta \in \mathbb{R}$ . Motivare la risposta.

- Il modello rappresenta un sistema **lineare** per  $\eta = 1$  e per ogni  $\rho \in \mathbb{R}$ . Se  $\eta \neq 1$ , il termine  $y^\eta$  è non lineare.
- Il sistema è **dinamico** per ogni  $\eta, \rho, \in \mathbb{R}$  poiché il modello è sempre un'equazione differenziale.
- Il sistema è **stazionario** per  $\rho = 1$  e per ogni  $\forall \eta \in \mathbb{R}$ . Se  $\rho \neq 1$  il coefficiente  $(1 - \rho)t^2$  del termine  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$  dipende dal tempo.
- Sistema a **parametri concentrati** per ogni  $\eta, \rho, \in \mathbb{R}$  poiché il modello non consiste in equazioni alle derivate parziali.
- Il sistema è privo di elementi di ritardo per ogni  $\eta, \rho, \in \mathbb{R}$ .
- Il sistema è inoltre **strettamente proprio** (causale) per ogni  $\eta, \rho, \in \mathbb{R}$ , in quanto l'ordine di derivazione dell'uscita è sempre maggiore dell'ordine di derivazione dell'ingresso.

- (e) Si consideri il sistema descritto dal modello in variabili di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) - \beta t^2 x_2(t) + 5u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \beta e^t x_1(t) + \alpha x_2^3(t) + u(t - 5) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) + (1 - \alpha)u(t) \end{cases}$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema lineare, stazionario, dinamico e causale per ogni possibile valore di  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Motivare la risposta.

- Il modello rappresenta un sistema **lineare** per  $\alpha = 0$  e per ogni  $\beta \in \mathbb{R}$ . Se  $\alpha \neq 0$  il termine  $\alpha x_2^3(t)$  nella seconda equazione di stato è non lineare.

- Il sistema è **dinamico** per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ : il vettore di stato non ha mai zero componenti.
- Il sistema è **stazionario** per  $\beta = 0$  e per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se  $\beta \neq 0$  i termini  $-\beta t^2 x_2(t)$  nella prima equazione di stato e  $\beta e^t x_1(t)$  nella seconda rendono il sistema tempovariante.
- Nel sistema è presente un elemento che introduce un ritardo di  $T = 5$ : vedi termine  $u(t - 5)$  nella seconda equazione di stato.
- Sistema a **parametri concentrati** poiché il vettore di stato ha dimensione finita.
- Un sistema espresso da un modello in Variabili di Stato è sempre proprio (causale), strettamente proprio se la trasformazione d'uscita non dipende dall'ingresso. In questo caso se  $\alpha = 1$  ed il sistema è **strettamente proprio**.

(f) Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso-uscita

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + \eta y(t) = 3u(t),$$

dove il parametro costante  $\eta \in \{17, 65\}$  può assumere due valori e si verifichi che l'evoluzione di tale sistema è caratterizzata, in entrambi i casi, da un modo pseudoperiodico.

(i) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso e se ne determinino i parametri caratteristici (costante di tempo, pulsazione naturale, coefficiente di smorzamento) per entrambi i valori del parametro  $\eta$ .

- Caso  $\eta = 17$   
 Polinomio caratteristico:  $P(s) = s^2 + 2s + 17$   
 Radici:  $p, p' = -1 \pm j4$   
 Costante di tempo:  $\tau = 1 \text{ s}$   
 Pulsazione naturale:  $\omega_n = 4.1 \text{ rad/s}$   
 Coeff. di smorzamento:  $\zeta = 0.24 \text{ rad}^{-1}$ .
- Caso  $\eta = 65$   
 Polinomio caratteristico:  $P(s) = s^2 + 2s + 65$   
 Radici:  $p, p' = -1 \pm j8$   
 Costante di tempo  $\tau = 1 \text{ s}$   
 Pulsazione naturale  $\omega_n = 8.1 \text{ rad/s}$   
 Coeff. di smorzamento  $\zeta = 0.12 \text{ rad}^{-1}$

(ii) Si discuta come il valore di  $\eta$  influisca sullo smorzamento e sul tempo di assestamento. Il tempo di assestamento vale  $3\tau$  e non varia al variare di  $\eta$ .

(iii) Si traccino qualitativamente i modi nei due casi.

Il modo più smorzato è quello con  $\eta = 17$ , può osservarsi dai grafici mostrati in Figura 1.

(g) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato dal polinomio caratteristico

$$P(s) = (s + 0.5)^3.$$

(i) Si determinino i modi di tale sistema e i loro parametri caratteristici, calcolando per il modo esponenziale la costante di tempo e per i modi a rampa esponenziale l'eventuale punto di massimo.

Determiniamo innanzitutto le radici del polinomio caratteristico:

$$P(s) = 0 \Rightarrow p = \alpha = -0.5 \quad \nu = 3$$

Alle tre radici sono associati i seguenti modi aperiodici stabili:  $e^{-t/2}$ ,  $t e^{-t/2}$ ,  $t^2 e^{-t/2}$

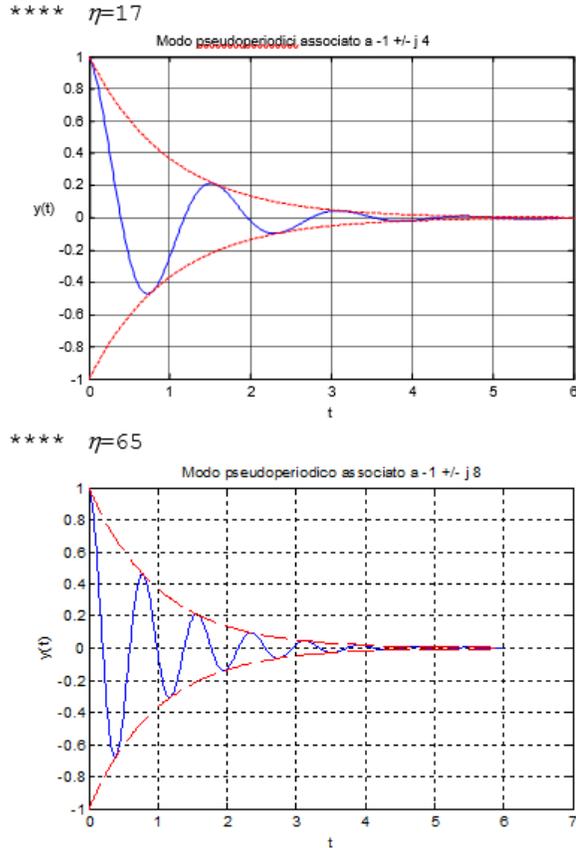


Figura 1: Modi pseudoperiodici associati a  $\eta = 17$  ed  $\eta = 65$ .

Determiniamo la costante di tempo  $\tau$ :

$$\alpha = -0.5 \Rightarrow \tau = -\frac{1}{\alpha} = 2$$

Il modo  $t e^{-t/2}$  ha un massimo per  $t = \tau = 2$

Il modo  $t^2 e^{-t/2}$  ha un massimo per  $t = 2\tau = 4$

(ii) Si tracci l'andamento qualitativo di tali modi indicando quale fra essi si estingue prima?

I grafici dei tre modi sono mostrati in Figura 2. Si estingue prima il modo  $e^{-t/2}$  perché per  $t > 1$  vale necessariamente  $e^{-t/2} < t e^{-t/2} < t^2 e^{-t/2}$ .

(iii) Si calcoli il tempo di assestamento del modo esponenziale.

Il modo  $e^{-t/2}$  ha tempo di assestamento al 5% pari a  $t_a = 3\tau = 6$

(h) Si determini se le seguenti matrici siano diagonalizzabili:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- $A_1$ : la matrice ha autovalori distinti di conseguenza sarà possibile determinare una base di autovettori che costituisce la matrice modale che permette di diagonalizzare il sistema.

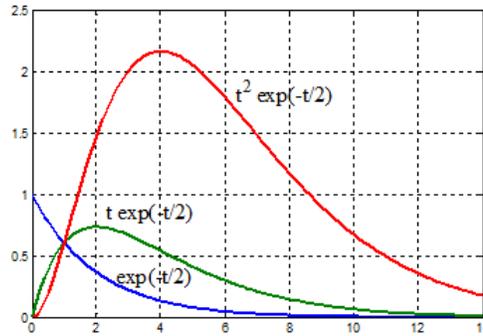


Figura 2

- $A_2$ : la matrice ha un unico autovalore  $\lambda = 2$  con molteplicità  $\nu = 2$ , di conseguenza non si può determinare a priori se il sistema sia diagonalizzabile o meno. Si dovrà verificare quanti autovettori indipendenti è possibile associare all'autovalore con molteplicità maggiore di uno:

$$- A v_1 = \lambda_1 v_1 \quad (A - \lambda_1 I)v_1 = 0$$

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

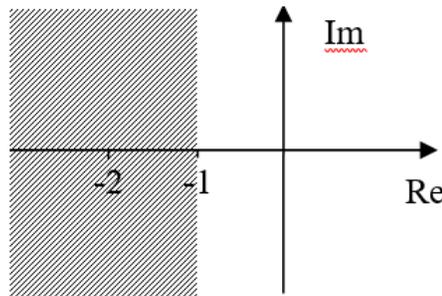
$$\begin{cases} -2 v_a - 2 v_b = 0 \\ 2 v_a + 2 v_b = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

Non è possibile determinare due autovettori indipendenti perciò non è possibile diagonalizzare il sistema.

- (i) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato da un polinomio caratteristico con 3 radici distinte, tutte associate a modi stabili e con tempo di assestamento minore di 3 s. Si discuta in che regione del piano complesso cadono tali radici.

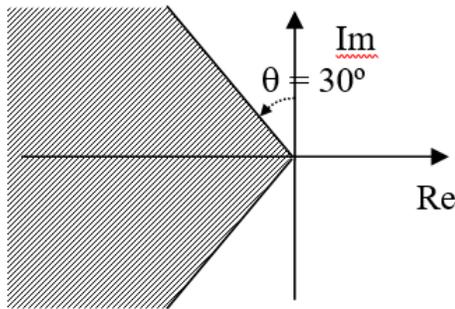
$$t_{a5\%} = 3\tau < 3; \Rightarrow \tau < 1$$

$$\tau = \frac{-1}{\alpha} < 1 \quad (NB : \alpha < 0) \Rightarrow \alpha < -1$$



- (i) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato da un polinomio caratteristico con 2 coppie di radici complesse e coniugate, entrambe associate a modi stabili e con coefficiente di smorzamento maggiore di 0.5. Si discuta in che regione del piano complesso cadono tali radici.

$$\zeta = \sin(\theta) > 0.5; \Rightarrow \theta > 30 \text{ gradi.}$$



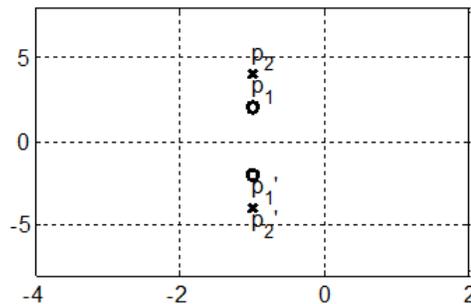
**Soluzione Esercizio 2.** Si considerino due coppie di radici complesse e coniugate

$$p_1, p_1' = -1 \pm j2, \quad p_2, p_2' = -1 \pm j4$$

(I) Si rappresentino le radici nel piano complesso.

$$p_1, p_1' = \alpha_1 \pm j\omega_1 = -1 \pm j2$$

$$p_2, p_2' = \alpha_2 \pm j\omega_2 = -1 \pm j4$$



(ii) Si determinino i modi che ad esse corrispondono, classificandoli e calcolandone i parametri caratteristici (costante di tempo, coefficiente di smorzamento, pulsazione naturale).

Ad ogni coppia di radici complesse e coniugate corrisponde un modo pseudoperiodico:  $e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$ . Dato che la parte reale di ogni coppia è  $\alpha < 0$  tali modi saranno stabili.

Costante di tempo:  $\tau_1 = 1.00$ ;  $\tau_2 = 1.00$

Coeff. smorzamento:  $\zeta_1 = 0.45$ ;  $\zeta_2 = 0.24$

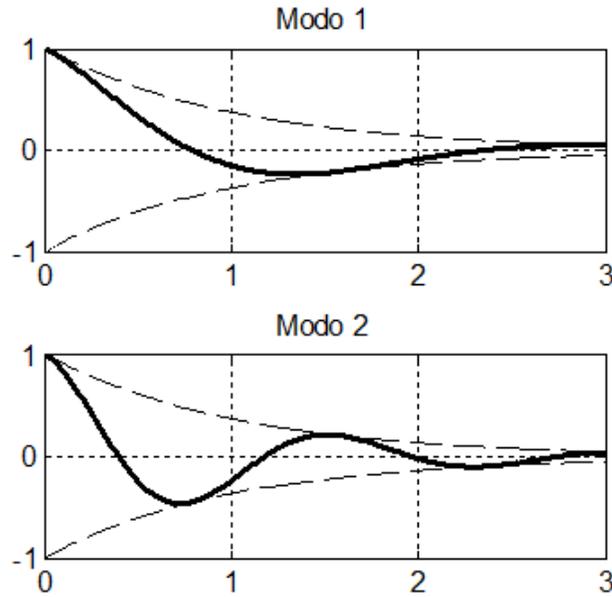
Pulsazione naturale:  $\omega_{n,1} = 2.24$ ;  $\omega_{n,2} = 4.12$

(iii) Si discuta quale dei due modi sia più smorzato e quale dei due abbia il minore tempo di assestamento.

Il modo più smorzato è il primo, perché  $\zeta_1 > \zeta_2$ .

I due modi hanno lo stesso tempo di assestamento, perché  $\tau_1 = \tau_2$ .

(iv) Si tracci l'andamento qualitativo dei due modi in funzione del tempo.



**Soluzione Esercizio 3.** Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t).$$

(a) Posto  $t_0 = 0$  si determini l'evoluzione libera nel dominio del tempo del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=t_0} = 1, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 1.$$

Per determinare l'evoluzione libera nel dominio del tempo è necessario individuare la corretta forma dell'evoluzione libera, data da una combinazione lineare dei modi del sistema, calcolarne le sue  $n - 1$  derivate e, imponendo le condizioni al contorno, determinare i parametri caratteristici dell'evoluzione libera.

Il primo passo è determinare il polinomio caratteristico e le sue radici:

$$P(s) = 2s^2 + 4s + 2 = 0 \quad \implies \quad \text{radice } p = -1 \text{ di molteplicità } \nu = 2$$

a cui corrispondono i modi  $e^{-t}$  e  $te^{-t}$ .

La forma dell'evoluzione libera sarà:

$$y_\ell(t) = A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t},$$

la sua derivata prima vale:

$$\frac{dy_\ell(t)}{dt} = -A_1 e^{-t} + A_2 e^{-t} - A_2 t e^{-t}.$$

Ora imponendo le condizioni iniziali fornite dal testo  $y_\ell(0) = 1$  e  $\dot{y}_\ell(0) = 1$  si ottiene:

$$\begin{cases} A_1 & = & 1 \\ -A_1 + A_2 & = & 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori appena determinati nell'espressione generale dell'evoluzione libera si ottiene il risultato cercato.

$$y_\ell(t) = (e^{-t} + 2t e^{-t}) \delta_{-1}(t)$$

- (b) Si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle stesse condizioni iniziali del punto precedente assumendo però  $t_0 = 3$ .

La proprietà di stazionarietà del sistema ci permette di affermare che l'evoluzione libera, a partire dalle stesse condizioni iniziali, si ottiene traslando l'evoluzione libera determinata per  $t_0 = 0$  nel nuovo istante iniziale  $t_0 = 3$ .

$$y_\ell(t) = \left( e^{-(t-3)} + 2(t-3)e^{-(t-3)} \right) \delta_{-1}(t-3)$$

**Soluzione Esercizio 4.** È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 3], \quad D = [0]$$

- (a) Si indichi la dimensione dei vettori di ingresso, stato e uscita.

$r = 1$  ingressi  
 $n = 2$  stati  
 $q = 1$  uscita

- (b) Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice  $A$ .

Autovalori:

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -2$$

Autovettori:

$$v_1 = [3 \quad 2]^T \quad v_2 = [1 \quad -1]^T$$

- (c) Si discuta se esiste una trasformazione di similitudine  $x(t) = Pz(t)$  che porta ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale. Se possibile si determini la rappresentazione diagonale.

La matrice di ordine 2 ha due autovalori distinti e dunque due autovettori linearmente indipendenti. Essa può quindi essere diagonalizzata mediante la matrice modale

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{la cui inversa vale} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & -0.6 \end{bmatrix}.$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B' = P^{-1}B = [0.6 \quad 0.2]^T; \quad C' = CP = [6 \quad -3]; \quad D' = D = 0.$$

- (d) Si determinino le matrici di transizione dello stato per entrambe le rappresentazioni.

$$e^{A't} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}; \quad e^{At} = P e^{A't} P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2e^{-2t} + 3e^{3t} & -3e^{-2t} + 3e^{3t} \\ -2e^{-2t} + 2e^{3t} & 3e^{-2t} + 2e^{3t} \end{bmatrix}.$$

- (e) Supposto che lo stato iniziale della rappresentazione diagonale sia  $z(0) = [1 \quad 1]^T$ , si determini, sfruttando le relazioni nel dominio del tempo, l'evoluzione dello stato  $z_\ell(t)$  e dell'uscita  $y_\ell(t)$ .

$$z_\ell(t) = e^{A't} z(0) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}; \quad y_\ell(t) = C' z_\ell(t) = 6e^{3t} - 3e^{-2t}.$$

(f) Si determini lo stato iniziale  $x(0)$  della rappresentazione originale che corrisponde allo stato iniziale dato  $z(0)$  della rappresentazione diagonale. Si calcoli l'evoluzione libera dello stato  $x_\ell(t)$  e dell'uscita  $y_\ell(t)$  della rappresentazione originale a partire da  $x(0)$ .

$$x(0) = P z(0) = [4 \ 1]^T$$

$$x_\ell(t) = e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} e^{-2t} + 3e^{3t} \\ -e^{-2t} + 2e^{3t} \end{bmatrix}; \quad y_\ell(t) = C x_\ell(t) = 6 e^{3t} - 3 e^{-2t}.$$

(g) Le due evoluzioni libere determinate al punto (e) ed (f) coincidono? Perché?

Sono due rappresentazioni dello stesso sistema, le evoluzioni libere dello stato sono diverse ma le evoluzioni libere dell'uscita sono correttamente coincidenti.

**Soluzione Esercizio 5.** Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni del tempo:

1.  $f_1(t) = 3e^{-4t} \delta_{-1}(t)$

$$F_1(s) = \frac{3}{s+4}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} \delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s-a}$$

2.  $f_2(t) = (t-3) \delta_{-1}(t) = t\delta_{-1}(t) - 3\delta_{-1}(t)$

$$F_2(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s} = \frac{1-3s}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{s^{k+1}} \text{ con } k = 0, 1$$

3.  $f_3(t) = (t+2)^2 e^t \delta_{-1}(t) = (t^2 e^t + 4te^t + 4e^t) \delta_{-1}(t)$

$$F_3(s) = \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{4}{s-1}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!} e^{at} \delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{(s-a)^{k+1}} \text{ con : } \begin{matrix} a = 1; \\ k = 0, 1, 2 \end{matrix}$$

4.  $f_4(t) = 6t^3 + 5) \delta_{-1}(t)$

$$F_4(s) = \frac{36}{s^4} + \frac{5}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!} e^{at} \delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{(s)^{k+1}} \text{ con : } k = 3$$

5.  $f_5(t) = t^2 \delta_{-1}(t) + 2\delta_{-1}(t-2) - (t-4)\delta_{-1}(t-4)$

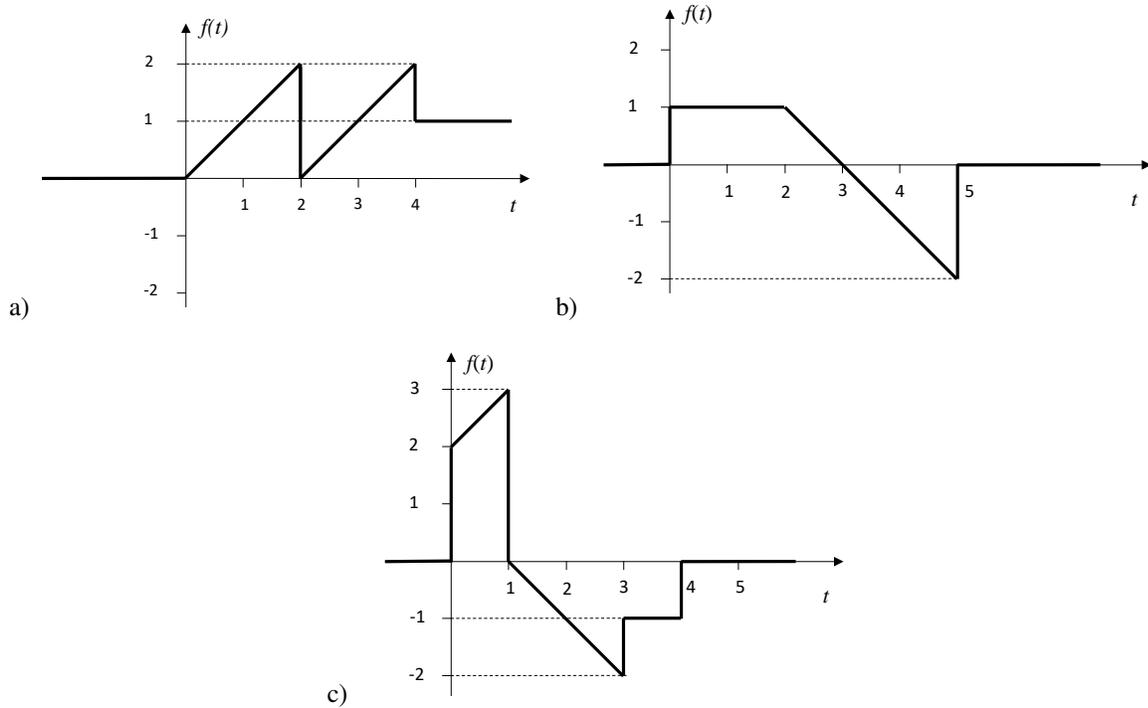
$$F_5(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s} e^{-2s} - \frac{1}{s^2} e^{-4s}$$

$$\begin{matrix} \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}[t \delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{s^{k+1}} \\ \mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-Ts} F(s) \end{matrix}$$

6.  $f_6(t) = \frac{1}{2}(e^{5t} + e^{-3t}) \delta_{-1}(t)$

$$F_6(s) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(s-5)} + \frac{1}{(s+3)} \right]$$

**Soluzione Esercizio 6.** Trasformare secondo Laplace le seguenti funzioni assegnate graficamente:



a) Si può facilmente verificare che la funzione data è lineare a tratti e presenta

- (a) in  $t = 0$ : un cambio di pendenza pari a +1 (la pendenza vale 0 in  $t = 0^-$  e passa a 1 in  $t = 0^+$ );
- (b) in  $t = 2$ : una discontinuità pari a meno -2 (la funzione vale 2 in  $t = 2^-$  e passa a 0 in  $t = 2^+$ );
- (c) in  $t = 4$ : una discontinuità pari a meno -1 (la funzione vale 2 in  $t = 4^-$  e passa a 1 in  $t = 4^+$ ) e un cambio di pendenza pari a -1 (la pendenza vale 1 in  $t = 4^-$  e passa a 0 in  $t = 4^+$ ).

Tenendo presente che una discontinuità corrisponde all'applicazione di un gradino e un cambio di pendenza all'applicazione di una rampa lineare, essa può essere scritta come la somma delle seguenti funzioni elementari:

$$f_a(t) = t\delta_{-1}(t) - 2\delta_{-1}(t-2) - \delta_{-1}(t-4) - (t-4)\delta_{-1}(t-4)$$

la cui trasformata vale:

$$F_a(s) = \mathcal{L}[f_a(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}e^{-2s} - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-4s}$$

$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] &= \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}[t\delta_{-1}(t)] &= \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}[f(t-T)] &= e^{-Ts}F(s) \end{aligned}$
---

b) La funzione è lineare a tratti e presenta

- (a) in  $t = 0$ : una discontinuità pari a +1;
- (b) in  $t = 2$ : un cambio di pendenza pari a -1;
- (c) in  $t = 5$ : una discontinuità pari a +2 e un cambio di pendenza pari a +1.

Essa può dunque essere scritta come la somma delle seguenti funzioni elementari:

$$f_b(t) = \delta_{-1}(t) - (t-2)\delta_{-1}(t-2) + 2\delta_{-1}(t-5) + (t-5)\delta_{-1}(t-5)$$

la cui trasformata vale:

$$F_b(s) = \mathcal{L}[f_b(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} e^{-2s} + \left( \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} \right) e^{-5s}$$

c) La funzione è lineare a tratti e presenta

- (a) in  $t = 0$ : una discontinuità pari a +2 e un cambio di pendenza pari a +1;
- (b) in  $t = 1$ : una discontinuità pari a -3 e un cambio di pendenza pari a -2;
- (c) in  $t = 3$ : una discontinuità pari a +1 e un cambio di pendenza pari a +1;
- (d) in  $t = 4$ : una discontinuità pari a +1,

Essa può dunque essere scritta come la somma delle seguenti funzioni elementari:

$$f_c(t) = 2\delta_{-1}(t) + t\delta_{-1}(t) - 3\delta_{-1}(t-1) - 2(t-1)\delta_{-1}(t-1) + \delta_{-1}(t-3) + (t-3)\delta_{-1}(t-3) + \delta_{-1}(t-4)$$

la cui trasformata vale:

$$F_c(s) = \mathcal{L}[f_c(t)] = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \left( \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} \right) e^{-s} + \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) e^{-3s} + \frac{1}{s} e^{-4s}$$

**Soluzione Esercizio 7.** Verificare il teorema del valore finale per la funzione  $f(t) = (2 - e^{-3t}) \delta_{-1}(t)$ .

Il Teorema del valore finale<sup>1</sup> afferma che se esiste finito il  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s).$$

Quindi è possibile applicare il teorema solo se esiste finito il  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ , come nel caso in esame.

Calcoliamo:

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+3} = \frac{s+6}{s(s+3)}$$

e verifichiamo che vale effettivamente:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+6}{s+3} = \frac{6}{3} = 2 = \lim_{t \rightarrow \infty} (2 - e^{-3t}).$$

**Soluzione Esercizio 8.** Antitrasformare le seguenti funzioni di  $s$ :

$$a) F(s) = \frac{2s+5}{s^3+6s^2+21s+26}$$

Per calcolare l'antitrasformata dobbiamo innanzitutto determinare le radici del polinomio al denominatore, una delle radici ( $p_1 = -2$ ) è data dal testo. Dividiamo quindi il denominatore per  $(s+2)$ :

$s^3 + 6s^2 + 21s + 26$	$s + 2$
$-s^3 - 2s^2$	$s^2 + 4s + 13$
$4s^2 + 21s + 26$	
$-4s^2 - 8s$	
$13s + 26$	
$-13s - 26$	
$0$	

<sup>1</sup>pag. 147 del libro di testo

$$s^2 + 4s + 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_2 = -2 + i3 \\ p'_2 = -2 - i3 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{2s + 5}{(s + 2)(s^2 + 4s + 13)} = \frac{R_1}{s + 2} + \frac{R_2}{s - (-2 + i3)} + \frac{R'_2}{s - (-2 - i3)} \quad \text{dove } R'_i \text{ è il complesso coniugato di } R_i.$$

Passiamo ora al calcolo dei residui; la  $F(s)$  è una funzione razionale strettamente propria e le radici del polinomio al denominatore hanno tutte molteplicità unitaria, pertanto:

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s)$$

I residui  $R_1$  ed  $R_2$  sono:

- $R_1 = \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2) \frac{2s + 5}{(s + 2)(s^2 + 4s + 13)} = \frac{-4 + 5}{4 - 8 + 13} = \frac{1}{9}$
- $R_2 = \lim_{s \rightarrow -2 + i3} (s - (-2 + i3)) \frac{2s + 5}{(s + 2)(s - (-2 + i3))(s - (-2 - i3))}$   
 $= \frac{2(-2 + 3i) + 5}{((-2 + i3) + 2)(-2 + 3i + 2 + i3)} = \frac{1 + 6i}{-18} = -\frac{1}{18} - i \frac{1}{3}$

Calcoliamo modulo e fase del residuo  $R_2$ ,

- $|R_2| = \frac{\sqrt{37}}{18}$
- $arg(R_2) = arctg\left(\frac{-1/3}{-1/18}\right) = arctg(6) - \pi = 1.41 - 3.14 = -1.74 \text{ rad}$

da cui si ricavano il modulo  $M$  e la fase  $\phi$  del modo aperiodico  $Me^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi)$  associato alla coppia di poli complessi e coniugati  $p_2, p'_2 = \alpha \pm i \omega = -2 \pm i 3$ :

- $M = 2|R_2| = \frac{\sqrt{37}}{9}$
- $\phi = arg(R_2) = -1.74 \text{ rad}$

Antitrasformando vale:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_1}{s - p_1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_2}{s - p_2} + \frac{R'_2}{s - p'_2}\right] = [R_1 e^{-p_1 t} + M e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi)] \delta_{-1}(t)$$

$$f(t) = \left[ \frac{1}{9} e^{-2t} + \frac{\sqrt{37}}{9} e^{-2t} \cos(3t - 1.74) \right] \delta_{-1}(t)$$

$$\text{b) } F(s) = \frac{s^2 + 4s}{(s + 2)^3} = \frac{R_0}{(s + 2)} + \frac{R_1}{(s + 2)^2} + \frac{R_2}{(s + 2)^3}$$

Funzione razionale strettamente propria avente un polo con molteplicità  $\nu = 3$ .

$$R_{i, \nu_i - j} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(j - i)!} \frac{d^{j-i}}{ds^{j-i}} (s - p_i)^{\nu_i} F(s)$$

- $R_0 = \lim_{s \rightarrow -2} \left( \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s+2)^3 \frac{s^2+4s}{(s+2)^3} \right] \right) = \lim_{s \rightarrow -2} \left( \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [s^2 + 4s] \right) = \frac{1}{2} 2 = \boxed{1}$
- $R_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \left( \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[ (s+2)^3 \frac{s^2+4s}{(s+2)^3} \right] \right) = \lim_{s \rightarrow -2} \left( \frac{d}{ds} [s^2 + 4s] \right) = 2 = \lim_{s \rightarrow -2} (2s + 4) = \boxed{0}$
- $R_3 = \lim_{s \rightarrow -2} \left( (s+2)^3 \frac{s^2+4s}{(s+2)^3} \right) = 4 - 8 = \boxed{-4}$

$$F(s) = \frac{-4}{(s+2)^3} + \frac{1}{(s+2)}$$

$$f(t) = \left( -4 e^{-2t} \frac{t^2}{2} + e^{-2t} \right) = \boxed{(-2t^2 + 1)e^{-2t} \delta_{-1}(t)}$$

c)  $F(s) = \frac{2s^3 + 5s^2 + 7s + 6}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} \quad (p_1 = -1)$

La  $F(s)$  non è una funzione strettamente propria, la  $f(t)$  di conseguenza avrà un termine impulsivo. Dividiamo il numeratore per il denominatore per porre la  $F(s)$  nella forma:  $F(s) = K' + F'(s)$

$$\begin{array}{r|l} 2s^3 + 5s^2 + 7s + 6 & s^3 + 5s^2 + 8s + 4 \\ \hline -2s^3 + 10s^2 - 16s - 8 & 2 \\ \hline -5s^2 - 9s - 8 & \end{array}$$

$$F(s) = K' + F'(s) = 2 - \frac{5s^2 + 9s + 8}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

Ci preoccupiamo ora di determinare l'antitrasformata della funzione razionale strettamente propria  $F'(s)$ , uno dei suoi poli è  $(p_1 = -1)$ , come dato dal testo.

$$\begin{array}{r|l} s^3 + 5s^2 + 8s + 4 & s + 1 \\ \hline -s^3 - s^2 & s^2 + 4s + 4 \\ \hline 4s^2 + 8s + 4 & \\ \hline -4s^2 - 4s & \\ \hline 4s + 4 & \\ \hline -4s - 4 & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow (s+2)^2$$

$$F(s)' = \frac{R_{1,0}}{(s+2)} + \frac{R_{1,1}}{(s+2)^2} + \frac{R_2}{s+1}$$

- $R_{1,0} = \lim_{s \rightarrow -2} \left( \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[ (s+2)^2 \frac{5s^2+9s+2}{(s+2)^2(s+1)} \right] \right) = \lim_{s \rightarrow -2} \left( \frac{(10s+9)(s+1) - (5s^2+9s+2)}{(s+1)^2} \right) = \boxed{7}$
- $R_{1,1} = \lim_{s \rightarrow -2} \left( (s+2)^2 \frac{5s^2+9s+2}{(s+2)^2(s+1)} \right) = \frac{20-18+2}{-1} = \boxed{-4}$
- $R_2 = \lim_{s \rightarrow -1} \left( (s+1) \frac{5s^2+9s+2}{(s+2)^2(s+1)} \right) = \frac{5-9+2}{1} = \boxed{-2}$

$$F(s) = 2 - \frac{7}{(s+2)} + \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{2}{s+1}$$

$$f(t) = 2 \delta(t) + (-7 e^{-2t} + 4t e^{-2t} + 2e^{-t}) \delta_{-1}(t)$$

**Soluzione Esercizio 9.** Si consideri il sistema lineare e stazionario già analizzato nell'Esercizio 3 e descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t).$$

(a) i determini mediante l'uso delle trasformate di Laplace l'evoluzione  $y(t)$  per  $t \geq 0$  a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=t_0} = 1, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 1,$$

e supponendo che il segnale in ingresso  $u(t)$  valga  $3t \delta_{-1}(t)$ . Si indichi il termine che corrisponde all'evoluzione libera e alla evoluzione forzata e si tracci l'andamento di tali segnali. L'evoluzione totale del sistema sarà dato dalla somma della evoluzione libera e forzata:

$$Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s) = \frac{Q(s)}{D(s)} + \frac{N(s)}{D(s)} U(s)$$

dove con  $N(s)$  e  $D(s)$  si sono indicati rispettivamente il numeratore e denominatore della funzione di trasferimento. Ricordiamo che la funzione di trasferimento è una funzione razionale in  $s$  che ha al numeratore il polinomio  $N(s)$  costruito con i coefficienti del secondo membro della equazione differenziale del sistema IU e al denominatore il polinomio  $D(s)$  costruito con i coefficienti del primo membro, in questo caso risulta:

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{2s^2 + 4s + 2}$$

Determiniamo per prima la evoluzione libera:

Per determinare il polinomio  $Q(s)$  per primo passo si trasforma secondo Laplace l'equazione differenziale data, per un sistema del secondo ordine vale:

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = b_m u^m + \dots + b_1 s + b_0$$

$$a_2 (s^2 Y(s) - y_0 s - y'_0) + a_1 (s Y(s) - y_0) + a_0 Y(s) = (b_m s^m + \dots b_1 s + b_0) U(s)$$

Sostituendo i valori si ottiene il sistema:

$$2 (s^2 Y(s) - 1s - 1) + 4 (s Y(s) - 1) + 2 Y(s) = U(s)$$

Isolando i termini che non dipendono da  $Y(s)$  e  $U(s)$  e portandoli al secondo membro otteniamo  $Q(s)$ :

$$2 s^2 Y(s) + 4 s Y(s) + 2 Y(s) = U(s) + 2s + 2 + 4$$

$$Q(s) = 2s + 6$$

Per determinare l'evoluzione libera è necessario antitrasformare la funzione  $\frac{Q(s)}{D(s)}$ :

$$y_\ell(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{Q(s)}{D(s)} \right] = \frac{2s+6}{2s^2+4s+2} = \frac{R_{1,0}}{2(s+1)^2} + \frac{R_{1,1}}{2(s+1)^2}$$

$$R_{1,1} = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^2 \frac{2s+6}{2(s+1)^2} = 2$$

$$R_{1,0} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[ (s+1)^2 \frac{2s+6}{2(s+1)^2} \right] = 1$$

$$y_\ell(t) = (e^{-t} + 2te^{-t})\delta_{-1}(t)$$

Passiamo ora al calcolo della risposta forzata, è necessario trasformare secondo Laplace il segnale in ingresso:

$$U(s) = \mathfrak{L}[u(t)] = \frac{3}{s^2}$$

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{3}{s^2(2s^2+4s+2)}$$

Determinando la forma residui-poli mediante lo sviluppo di Heaviside ed antitrasformando si trova

$$\left( \frac{3}{2}t + 3e^{-t} + \frac{3}{2}te^{-t} - 3 \right) \delta_{-1}(t)$$