

---

## Stabilità

---

Versione ridotta del Capitolo 9 del libro:

A. Giua, C. Seatzu, *Analisi dei sistemi dinamici*, Springer-Verlag Italia, 2009 (II edizione).

Data: 20 maggio 2019

---

In questo capitolo verrà introdotta una proprietà fondamentale nello studio dei sistemi dinamici, la stabilità. L'importanza di tale proprietà deriva dal fatto che la stabilità è una specifica imposta a quasi ogni sistema fisico controllato perché implica la possibilità di lavorare intorno a certe condizioni nominali senza discostarsi troppo da esse.

Nel seguito verranno introdotte due diverse definizioni di stabilità: la prima relativa al legame ingresso-uscita (stabilità BIBO), la seconda relativa ad una rappresentazione in termini di variabili di stato (stabilità alla Lyapunov). Nel primo caso limiteremo la nostra analisi ai soli sistemi lineari, nel secondo caso invece le definizioni date sono valide anche nel caso più generale di sistemi non lineari.

Nella terza sezione di questo capitolo verrà poi affrontato il problema dello studio della stabilità secondo Lyapunov per sistemi lineari e stazionari. In particolare verrà fornito un importante criterio di analisi basato sul calcolo degli autovalori della matrice di stato  $A$  (criterio degli autovalori). La sezione termina con un confronto tra la stabilità BIBO e la stabilità alla Lyapunov.

### 9.1 Stabilità BIBO

#### 9.1.1 Definizioni generali

Si consideri un sistema SISO e si supponga che tale sistema sia a riposo nell'istante iniziale  $t_0 = 0$ . Si supponga inoltre che tale sistema venga perturbato mediante l'applicazione per  $t \geq 0$  di un ingresso esterno  $u(t)$  di ampiezza limitata. L'ipotesi di limitatezza implica che esista una costante  $M_u > 0$  tale che

$$|u(t)| \leq M_u < \infty \quad \forall t \geq 0.$$

Ciò che è importante sapere è se nel tempo l'uscita di tale sistema tende a divergere, oppure se si mantiene anch'essa limitata. In altre parole, ci si chiede se anche per l'uscita  $y(t)$ , esiste una costante  $M_y > 0$  tale

$$|y(t)| \leq M_y < \infty \quad \forall t \geq 0.$$

Nel caso in cui tale condizione sia verificata qualunque sia l'ingresso esterno applicato, purché di ampiezza limitata, il sistema viene detto BIBO stabile<sup>1</sup>. Più precisamente, vale la seguente definizione formale mentre il significato fisico delle definizioni sopra date è illustrato in Fig. 9.1.

---

<sup>1</sup>Nella letteratura italiana la BIBO stabilità viene anche spesso indicata come stabilità ILUL (ingresso-limitato uscita-limitata).

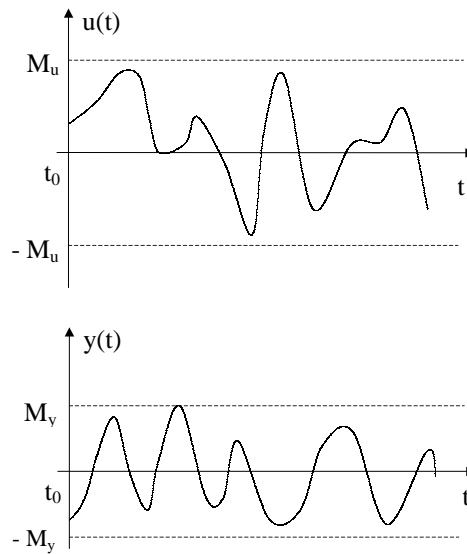


Fig. 9.1. Funzioni di ingresso e di uscita di un sistema BIBO stabile

**Definizione 9.1** Un sistema SISO è detto BIBO (bounded-input bounded-output) stabile se e solo se a partire da una condizione di riposo, ad ogni ingresso limitato risponde con un'uscita anch'essa limitata.

È importante osservare che se un sistema non è BIBO stabile, non è detto che risponda con una uscita illimitata ad ogni ingresso limitato. È però vero che se non è BIBO stabile è sempre possibile determinare degli ingressi la cui uscita corrispondente è illimitata, come apparirà evidente nel paragrafo che segue.

### 9.1.2 Sistemi lineari e stazionari

Per i sistemi *lineari e stazionari* l'analisi della BIBO stabilità si semplifica notevolmente ed esistono alcuni risultati fondamentali in proposito. Si noti che nel seguito, per semplicità di trattazione, supporremo che tale funzione di trasferimento sia in *forma minima* (cfr. § 6.4.2), ovvero che non abbia alcun polo coincidente con uno zero.

Il seguente teorema lega la stabilità BIBO ai poli della funzione di trasferimento del sistema  $W(s)$ .

**Teorema 9.2.** Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema SISO, lineare e stazionario sia BIBO stabile è che tutti i poli della funzione di trasferimento  $W(s)$  in forma minima siano a parte reale strettamente negativa.

*Dimostrazione.* Non daremo una prova formale del teorema, ma faremo alcune osservazioni.

Per quanto visto precedentemente, se  $y_f(t)$  è la risposta forzata conseguente ad un ingresso  $u(t)$ , nel dominio della variabile di Laplace vale:

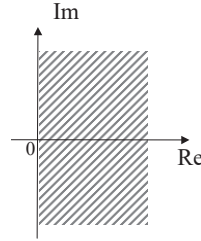
$$Y_f(s) = W(s) \cdot U(s) = Y_{f.o}(s) + Y_{f.p}(s),$$

dove  $Y_{f.o}(s)$  denota la somma dei termini associati ai poli di  $W(s)$  nello sviluppo di Heaviside di  $Y_f(s)$  (la cui antritrasmformata è una combinazione lineare dei modi) e  $Y_{f.p}(s)$  denota la somma dei termini aggiuntivi dovuti ai poli introdotti da  $U(s)$ .

Antitrasformando, possiamo anche scrivere

$$y_f(t) = y_{f.o}(t) + y_{f.p}(t)$$

e osserviamo quanto segue.



**Fig. 9.2.** Piano di Gauss: la regione tratteggiata indica la zona di instabilità e include l'asse immaginario. La regione di stabilità consiste nel semipiano  $\mathbb{C}^-$  che comprende tutti i punti aventi parte reale negativa.

- Se tutti i poli di  $W(s)$  sono a parte reale negativa, il termine  $y_{f.o}(t)$  contiene modi stabili e dunque limitati. Se supponiamo che  $u(t)$  sia un segnale limitato anche il termine  $y_{f.p}(t)$  conterrà solo modi limitati (ovvero modi stabili e al limite di stabilità) e dunque da ciò consegue la limitatezza del segnale  $y_f(t)$ .
- Se  $W(s)$  ha un polo a parte reale positiva i corrispondenti modi saranno instabili e dunque non limitati. Tali modi si ritrovano nel termine  $y_{f.o}(t)$  che sarà dunque illimitato anche in presenza di ingressi limitati.
- Se  $W(s)$  ha un polo  $p$  a parte reale nulla e molteplicità  $\nu > 1$ , ad esso competono  $\nu - 1$  modi  $te^{pt}, \dots, t^{\nu-1}e^{pt}$  che sono instabili e dunque non limitati. Tali modi si ritrovano nel termine  $y_{f.o}(t)$  che sarà dunque illimitato anche in presenza di ingressi limitati.
- Se  $W(s)$  ha un polo  $p$  a parte reale nulla e molteplicità  $\nu = 1$ , ad esso compete il modo  $e^{pt}$  che è al limite di stabilità, ossia limitato. Tuttavia se  $p$  è anche un polo di  $U(s)$ , se anche l'ingresso fosse limitato nel termine  $y_{f.p}(t)$  comparirebbe il modo illimitato  $te^{pt}$ . Dunque il sistema non sarebbe BIBO stabile (vedi Esempio 9.4).  $\square$

In base al precedente teorema un sistema è stabile se e solo se i poli della sua funzione di trasferimento giacciono nel semipiano sinistro  $\mathbb{C}^-$  del piano di Gauss  $(\alpha, j\omega)$ , ovvero non giacciono nella regione tratteggiata in Fig. 9.2. Si noti che l'asse immaginario non appartiene alla regione di stabilità BIBO.

**Esempio 9.3** Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso-uscita

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 2u(t)$$

la cui funzione di trasferimento vale

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2}{s^2 + 5s + 6} = \frac{2}{(s + 3)(s + 2)}$$

Le radici del polinomio caratteristico  $D(s)$  sono  $p_1 = -3$  e  $p_2 = -2$  entrambe reali e negative. In virtù del Teorema 9.2 possiamo pertanto concludere che il sistema è BIBO stabile.

Come conferma, vediamo ad esempio cosa succede applicando al sistema un segnale di ingresso  $u(t) = e^{at}\delta_{-1}(t)$ . Si noti che l'ingresso è limitato se e solo se  $a \leq 0$  e, in particolare, nel caso  $a = 0$  l'ingresso si riduce ad un gradino unitario.

Vale

$$Y_f(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{2}{(s + 3)(s + 2)} \cdot \frac{1}{s - a}$$

Se supponiamo  $a \neq -3$  e  $a \neq -2$ , possiamo sviluppare la risposta forzata come segue:

$$Y_f(s) = \underbrace{\frac{R_1}{s + 3} + \frac{R_2}{s + 2}}_{Y_{f.o}(s)} + \underbrace{\frac{\hat{R}}{s - a}}_{Y_{f.p}(s)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_f(t) = \underbrace{(R_1e^{-3t} + R_2e^{-2t})\delta_{-1}(t)}_{y_{f.o}(t)} + \underbrace{\hat{R}e^{at}\delta_{-1}(t)}_{y_{f.p}(t)}$$

Con la notazione introdotta nella prova informale del Teorema 9.2, riconosciamo nella risposta due termini. Il termine  $y_{f.o}(t)$  contiene i modi del sistema, associati ai poli della  $W(s)$ . Il termine  $y_{f.p}(t) = \hat{R}e^{at}\delta_{-1}(t)$

contiene il modo aggiuntivo introdotto dall'ingresso e associato al polo della  $U(s)$ . In tal caso, la risposta forzata sarà limitata per ogni ingresso limitato.

Se supponiamo  $a = -2$  allora vale

$$Y_f(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{2}{(s+3)(s+2)} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{2}{(s+3)(s+2)^2}$$

e possiamo sviluppare la risposta forzata come segue:

$$Y_f(s) = \underbrace{\frac{R_1}{s+3} + \frac{R_2}{s+2}}_{Y_{f.o}(s)} + \underbrace{\frac{\hat{R}}{(s+2)^2}}_{Y_{f.p}(s)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_f(t) = \underbrace{(R_1 e^{-3t} + R_2 e^{-2t}) \delta_{-1}(t)}_{y_{f.o}(t)} + \underbrace{\hat{R} t e^{-2t} \delta_{-1}(t)}_{y_{f.p}(t)}$$

dove il termine  $y_{f.p}(t) = \hat{R} t e^{-2t} \delta_{-1}(t)$  contenente il modo introdotto dalla  $U(s)$  è una rampa esponenziale comunque stabile e dunque anche in questo caso la risposta forzata sarà limitata.

Il caso  $a = -3$  è analogo al precedente.  $\diamond$

**Esempio 9.4** Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso-uscita

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} = 2u(t)$$

la cui funzione di trasferimento vale

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2}{s^2 + 4s} = \frac{2}{(s+4)s}$$

Le radici del polinomio caratteristico  $D(s)$  sono  $p_1 = 0$  e  $p_2 = -4$ . Avendo  $p_1$  parte reale nulla, in virtù del Teorema 9.2 possiamo pertanto concludere che il sistema non è BIBO stabile.

Come conferma, vediamo un esempio di ingresso limitato a cui corrisponde un'uscita illimitata. Si consideri l'ingresso  $u(t) = \delta_{-1}(t)$  pari a un gradino unitario. La risposta corrispondente sarà:

$$Y_f(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{2}{(s+4)s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{(s+4)s^2}$$

e può essere sviluppata come segue:

$$Y_f(s) = \underbrace{\frac{R_1}{s+4} + \frac{R_2}{s}}_{Y_{f.o}(s)} + \underbrace{\frac{\hat{R}}{s^2}}_{Y_{f.p}(s)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_f(t) = \underbrace{(R_1 e^{-4t} + R_2) \delta_{-1}(t)}_{y_{f.o}(t)} + \underbrace{\hat{R} t \delta_{-1}(t)}_{y_{f.p}(t)}$$

dove il termine  $y_{f.p}(t) = \hat{R} t \delta_{-1}(t)$  contenente il modo introdotto dalla  $U(s)$  è una rampa lineare, ovvero un segnale non limitato. Da ciò consegue che la risposta forzata non sarà limitata.  $\diamond$

Il precedente esempio può generalizzarsi al caso in cui la funzione di trasferimento abbia una coppia di poli immaginari e coniugati  $p, p' = \pm j\omega$ . Il sistema non è BIBO stabile perché in corrispondenza ad un ingresso limitato  $u(t) = \cos(\omega t)$  nella risposta forzata comparirà un modo instabile  $t \cos(\omega t)$ .

## 9.2 Stabilità secondo Lyapunov delle rappresentazioni in termini di variabili di stato

In questa sezione verrà introdotta una diversa nozione di stabilità che fa riferimento ai sistemi autonomi descritti in termini di variabili di stato e che può anche applicarsi ai sistemi non lineari. Tale definizione è stata per la prima volta proposta dallo studioso russo A. Lyapunov<sup>2</sup> ed è questa la ragione per cui viene comunemente detta stabilità alla Lyapunov.

<sup>2</sup>Alexey Andreevich Lyapunov (Mosca, Russia, 1911 - 1973).

Come già visto nel Capitolo 2, un generico sistema dinamico viene descritto in termini di variabili di stato mediante un sistema di equazioni differenziali nella forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{9.1}$$

dove  $\mathbf{f}$  è una funzione vettoriale a  $n$  componenti,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  è il vettore di stato e  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$  è il vettore degli ingressi.

Per semplicità di presentazione in questa sezione limiteremo la nostra attenzione ad una classe particolare di sistemi dinamici nella forma (9.1), detti *autonomi* e definiti come segue.

**Definizione 9.5** Il sistema (9.1) è detto autonomo se

- l'ingresso  $\mathbf{u}(t)$  è identicamente nullo,
- il sistema è stazionario, ovvero la funzione  $\mathbf{f}$  non dipende esplicitamente dal tempo.

Nel caso di sistemi autonomi l'eq. (9.1) può essere scritta come

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \tag{9.2}$$

ovvero

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \tag{9.3}$$

**Definizione 9.6** La soluzione dell'eq. (9.3) a partire da un istante di tempo  $t_0$  e da uno stato iniziale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  definisce nello spazio di stato una curva parametrizzata dal valore del tempo  $t$ , che denotiamo  $\mathbf{x}(t)$ . Tale curva viene detta *evoluzione* nello spazio di stato del sistema.

Si noti che l'evoluzione è chiaramente funzione, oltre che dell'istante di tempo  $t$ , anche del tempo iniziale e dello stato iniziale. Sarebbe pertanto più preciso indicarla come  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ . Per semplicità di notazione si preferisce tuttavia esplicitare la sola dipendenza dal tempo  $t$ , distinguendo ove necessario, con opportuna notazione definita di volta in volta, evoluzioni aventi origine a partire da istanti iniziali diversi e/o stati iniziali diversi.

Inoltre, sempre per semplificare la trattazione, assumeremo quando non indicato diversamente,  $t_0 = 0$ .

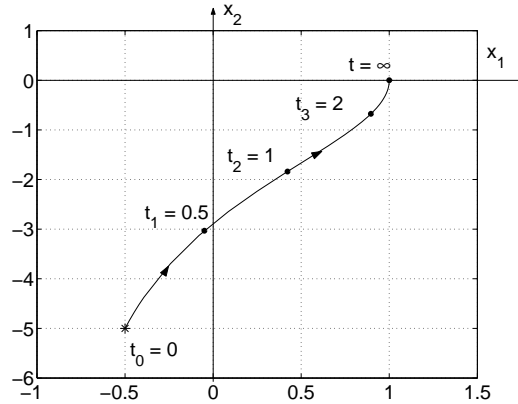
**Esempio 9.7** Si consideri il sistema autonomo non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 1 - x_1^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t). \end{cases} \tag{9.4}$$

Si supponga che all'istante  $t_0 = 0$  il sistema si trovi nel generico stato iniziale  $\mathbf{x}_0 = [x_{1,0} \ x_{2,0}]^T$  e sia  $|x_{1,0}| < 1$ . Sotto tale ipotesi sulla  $|x_{1,0}|$ , è facile integrare per parti il sistema di equazioni differenziali (9.4). In particolare, posto  $a = \operatorname{atanh}(x_{1,0})$ , dove  $\operatorname{atanh}$  indica l'inverso della tangente iperbolica, abbiamo

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{e^{(t+a)} - e^{-(t+a)}}{e^{(t+a)} + e^{-(t+a)}} \\ x_2(t) = x_{2,0}e^{-t}. \end{cases} \tag{9.5}$$

L'evoluzione nello spazio di stato del sistema (9.4) ottenuta ponendo  $\mathbf{x}_0 = [-0.5 \ -5]^T$  è riportata in Fig. 9.3 dove  $\mathbf{x}_0$  è indicato con un asterisco. Tale curva è parametrizzata dal valore del tempo e a titolo esplicativo sono stati riportati i valori del tempo lungo alcuni punti. Come si vede chiaramente dalla Fig. 9.3 per  $t \rightarrow \infty$  l'evoluzione converge al punto  $[1 \ 0]^T$ , la qual cosa è anche immediatamente verificabile a partire dalla soluzione analitica del sistema (9.5). ◇



**Fig. 9.3.** L'evoluzione nello spazio di stato del sistema non lineare (9.4) a partire dalla condizione iniziale  $\mathbf{x}_0 = [-0.5 \ -5]^T$

### 9.2.1 Stati di equilibrio

La teoria della stabilità di Lyapunov è basata su una nozione fondamentale che è quella di stato di equilibrio.

**Definizione 9.8** Uno stato  $\mathbf{x}_e$  è uno stato di equilibrio, o equivalentemente un punto di equilibrio per il sistema (9.1), se vale la seguente condizione:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_e \Rightarrow (\forall t \geq t_0) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e,$$

ovvero se ogni evoluzione che parte da  $\mathbf{x}_e$  all'istante di tempo  $t_0$  resta in  $\mathbf{x}_e$  in ogni istante successivo.

Da un punto di vista prettamente matematico ciò implica che il vettore costante  $\mathbf{x}_e$  è soluzione del sistema

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0},$$

poiché infatti, se  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$  allora  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}$  e dunque lo stato non varia negli istanti successivi essendo la sua derivata nulla.

**Esempio 9.9** Si consideri ancora il sistema autonomo in eq. (9.4). È facile verificare che tale sistema ha 2 stati di equilibrio,  $\mathbf{x}_{1,e} = [1 \ 0]^T$  e  $\mathbf{x}_{2,e} = [-1 \ 0]^T$  essendo tali vettori le uniche soluzioni del sistema  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Ciò comporta che ogni evoluzione del sistema che ha origine da uno qualunque di tali punti, resta in tale punto in ogni istante di tempo successivo.

Per meglio chiarire la definizione di stato di equilibrio, in Fig. 9.4 sono riportate alcune evoluzioni del sistema (9.4) ottenute a partire da diverse condizioni iniziali<sup>3</sup>.

In ogni curva in Fig. 9.4 è stato indicato un verso di percorrenza che specifica appunto come il sistema evolve al crescere del tempo. Come si vede tutte le evoluzioni che hanno origine da un punto che si trova alla destra della retta  $x_1 = -1$  raggiungono lo stato di equilibrio  $\mathbf{x}_{1,e}$ . Le evoluzioni che hanno origine in un qualunque punto lungo la retta  $x_1 = -1$  terminano invece nello stato di equilibrio  $\mathbf{x}_{2,e}$ . Infine, le evoluzioni che hanno origine in un qualunque punto alla sinistra della retta  $x_1 = -1$  non terminano in nessuno degli stati di equilibrio e si allontanano indefinitamente da questi al trascorrere del tempo.  $\diamond$

<sup>3</sup>Si noti che, come discusso nell'Esempio 9.7, se lo stato iniziale verifica la condizione  $|x_{1,0}| < 1$ , è possibile allora procedendo ad una integrazione per parti, determinare analiticamente la soluzione del sistema (9.4). Per punti al di fuori di tale regione ciò non è invece possibile. Tuttavia le evoluzioni aventi origine da punti non appartenenti alla regione  $|x_{1,0}| < 1$  sono calcolabili per integrazione numerica.

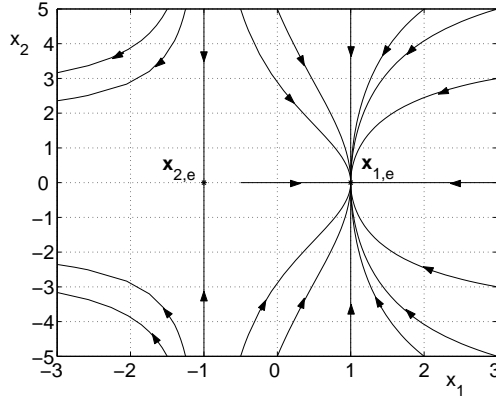


Fig. 9.4. Alcune evoluzioni del sistema non lineare (9.4) a partire da diverse condizioni iniziali

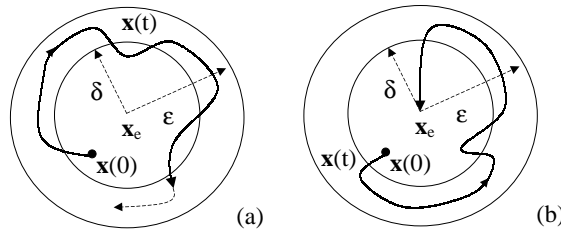


Fig. 9.5. (a) Stato di equilibrio stabile e una evoluzione rappresentativa; (b) stato di equilibrio asintoticamente stabile e una evoluzione rappresentativa

9.2.2 Definizioni di stabilità secondo Lyapunov

Uno dei maggiore contributi della teoria di Lyapunov è la definizione di stabilità di uno stato di equilibrio.

**Definizione 9.10** Uno stato di equilibrio  $x_e$  è detto stabile se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un  $\delta(\epsilon) > 0$  tale che se  $\|x(0) - x_e\| \leq \delta(\epsilon)$ , allora  $\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon$  per ogni  $t \geq 0$ . In caso contrario  $x_e$  è uno stato di equilibrio instabile.

La stabilità nel senso di Lyapunov implica pertanto che se un punto di equilibrio è stabile, la sua evoluzione si mantiene arbitrariamente prossima a tale punto, purché le condizioni iniziali del sistema siano sufficientemente prossime a questo, come illustrato in Fig. 9.5.a. Ossia preso un intorno di centro  $x_e$  e raggio  $\epsilon$ , se il punto di equilibrio  $x_e$  è stabile è sempre possibile determinare un nuovo intorno di raggio  $\delta(\epsilon)$  e centro  $x_e$  tale che, se lo stato iniziale del sistema viene portato in un punto nell'intorno di raggio  $\delta(\epsilon)$ , il sistema evolve lungo una curva che non si porterà mai al di fuori dell'intorno di raggio  $\epsilon$ .

Si osservi che se un sistema è non lineare la stabilità di uno stato di equilibrio non implica la stabilità degli altri stati di equilibrio.

**Esempio 9.11** Si consideri il sistema (9.4) che, come discusso sopra, ha due diversi stati di equilibrio  $x_{1,e}$  e  $x_{2,e}$ . In particolare, è possibile dimostrare che di questi stati di equilibrio solo  $x_{1,e}$  è stabile. In generale tale dimostrazione richiede l'applicazione di opportuni criteri di stabilità che saranno presentati solo nel seguito. Tuttavia nel caso in esame tale conclusione può facilmente trarsi applicando proprio la definizione di stabilità di uno stato di equilibrio.

Si fissi dapprima l'attenzione sul punto  $x_{1,e}$ . Si consideri un qualunque valore di  $\epsilon > 0$  purché sia  $\epsilon < 2$  e si assuma  $\delta(\epsilon) = \epsilon$ . È immediato dimostrare che tutte le evoluzioni aventi origine nel cerchio di centro  $x_{1,e}$  e raggio  $\epsilon$  non escono da tale cerchio, o equivalentemente, qualunque sia  $x(0)$  tale che  $\|x(0) - x_{1,e}\| \leq \delta(\epsilon)$ , allora  $\|x - x_{1,e}\| < \epsilon$  per ogni  $t \geq 0$ , che è proprio la condizione di stabilità. Infatti, dato il sistema (9.4), possiamo affermare quanto segue. Se lo stato del sistema si trova in un punto

in cui  $x_2 > 0$ , essendo in tal punto  $\dot{x}_2 < 0$ , il valore attuale di  $x_2$  decresce fino ad incontrare l'asse delle ascisse. Viceversa, se lo stato si trova in un punto in cui  $x_2 < 0$ , essendo in tal punto  $\dot{x}_2 > 0$ , il valore di  $x_2$  cresce fino ad incontrare l'asse delle ascisse. Infine, se lo stato si trova in un punto sull'asse delle ascisse, non potrà allontanarsi da tale asse essendo ivi  $\dot{x}_2 = 0$ . Analogamente, se lo stato si trova in un punto la cui ascissa non dista da  $x_1 = -1$  più di  $\varepsilon < 2$  e tale punto è alla destra (sinistra) di  $x_1 = -1$ , essendo in tal punto  $\dot{x}_1 < 0$  ( $\dot{x}_1 > 0$ ), lo stato evolverà nella direzione di  $x_1 = -1$ .

Si noti che se fissassimo un valore di  $\varepsilon \geq 2$  non potremmo più assumere  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$  ma dovremmo porre  $\delta(\varepsilon) = k$  dove  $k$  è una qualunque costante purché sia  $k < 2$ , e ciò a prescindere dal particolare valore di  $\varepsilon$  scelto.

Si consideri ora lo stato di equilibrio  $\mathbf{x}_{2,e}$ . In tal caso non è più vero che le *evoluzioni* aventi origine in un punto “sufficientemente” vicino ad  $\mathbf{x}_{2,e}$  si mantengono in un intorno di tale punto. Infatti, qualunque evoluzione avente origine in un punto alla sinistra di  $\mathbf{x}_{2,e}$ , anche se arbitrariamente vicino ad esso, si allontana indefinitamente da tale stato di equilibrio al trascorrere del tempo, essendo in tal punto  $\dot{x}_1 < 0$ .  $\diamond$

**Esempio 9.12** Si consideri il sistema lineare autonomo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (9.6)$$

L'origine è chiaramente l'unico punto di equilibrio essendo l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} -4x_2 = 0 \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

In particolare, si può dimostrare che tale stato di equilibrio è stabile. Come già chiarito sopra, stabilire se un punto di equilibrio è stabile o meno richiede in genere l'applicazione di opportuni criteri. Tuttavia anche in questo caso, data la sua semplicità, tale conclusione può essere tratta sulla base della definizione stessa di stabilità. Nel caso ora in esame la matrice  $\mathbf{A}$  vale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e i suoi autovalori valgono  $\lambda, \lambda' = \pm j2$ . Come visto nel Capitolo 5, la soluzione del sistema lineare  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  con stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  vale per  $t \geq 0$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

dove nel caso in esame la matrice di transizione dello stato è

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos(2t) & -2 \sin(2t) \\ 0.5 \sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}.$$

L'evoluzione del sistema avente origine in un generico punto  $\mathbf{x}_0 = [x_{1,0} \ x_{2,0}]^T$  è pertanto regolata dall'equazione

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos(2t)x_{1,0} - 2 \sin(2t)x_{2,0} \\ x_2(t) = 0.5 \sin(2t)x_{1,0} + \cos(2t)x_{2,0}. \end{cases}$$

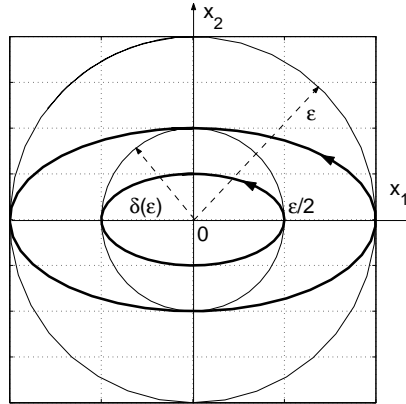
Eliminando la dipendenza dal tempo, otteniamo la seguente equazione

$$x_1^2 + 4x_2^2 = x_{1,0}^2 + 4x_{2,0}^2$$

che coincide con un'ellisse che interseca gli assi nei punti

$$\left[ \pm \sqrt{x_{1,0}^2 + 4x_{2,0}^2} \ 0 \right]^T, \quad \left[ 0 \ \pm \frac{\sqrt{x_{1,0}^2 + 4x_{2,0}^2}}{2} \right]^T.$$





**Fig. 9.6.** Evoluzioni del sistema (9.6) e intorno dell'origine di raggio  $\varepsilon$  e  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$

Come verrà formalmente definito nella successiva sezione asteriscata, tale curva definisce la *traiettoria* del sistema.

Ora, preso un qualunque  $\varepsilon > 0$  si assuma  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$ . È evidente che — si veda in proposito la Fig. 9.6 — qualunque evoluzione avente origine in un intorno di  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  di raggio  $\varepsilon/2$ , si mantiene sempre all'interno del cerchio di centro  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  e raggio  $\varepsilon$ , che è proprio la condizione di stabilità dell'origine.  $\diamond$

### 9.2.3 Stabilità asintotica

Un concetto più forte di quello di stabilità è quello di stabilità asintotica che richiede anche il soddisfacimento di una condizione al limite. Più precisamente la stabilità asintotica non solo richiede che l'evoluzione del sistema perturbato si mantenga in un intorno del punto di equilibrio, ma richiede anche che per  $t \rightarrow \infty$  tale evoluzione si porti proprio a coincidere con il punto di equilibrio. Tale concetto è intuitivamente illustrato in Fig. 9.5.b e formalmente espresso come segue.

**Definizione 9.13** Uno stato di equilibrio  $\mathbf{x}_e$  è detto asintoticamente stabile se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta(\varepsilon) > 0$  tale che se  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e\| \leq \delta(\varepsilon)$  allora valgono entrambe le seguenti condizioni:

- (i)  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \leq \varepsilon$  per ogni  $t \geq 0$ ;
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| = 0$ .

**Esempio 9.14** Lo stato di equilibrio stabile dei sistemi (9.4) è anche asintoticamente stabile. Al contrario, l'origine è uno stato di equilibrio stabile per il sistema (9.6) ma non asintoticamente stabile. Infatti come si vede dalla Fig. 9.6 le evoluzioni di tale sistema sono delle ellissi percorse in senso antiorario i cui punti di intersezione con gli assi dipendono dalle particolari condizioni iniziali.  $\diamond$

### 9.2.4 Stabilità globale

Tutte le definizioni sopra date, riferendosi ad un intorno del punto di equilibrio, permettono di caratterizzare esclusivamente il comportamento *locale* del sistema, ossia permettono di caratterizzare la sua risposta nel caso in cui il sistema venga sottoposto a piccole perturbazioni in prossimità dello stato di equilibrio. L'insieme delle possibili condizioni iniziali a partire dalle quali si ha asintotica stabilità costituisce il *dominio di attrazione*. Qualora il dominio di attrazione coincida con l'intero spazio di stato si parla di *globale asintotica stabilità*.

**Definizione 9.15** Uno stato di equilibrio  $\mathbf{x}_e$  è detto globalmente asintoticamente stabile se è asintoticamente stabile e se, per ogni stato iniziale  $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ , la corrispondente evoluzione  $\mathbf{x}(t)$  ritorna a  $\mathbf{x}_e$ , ovvero

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e.$$

Si osservi che se un sistema ha uno stato di equilibrio globalmente asintoticamente stabile, allora questo è anche l'*unico* stato di equilibrio del sistema.

Nei problemi ingegneristici reali la globale asintotica stabilità è una proprietà desiderabile anche se molto spesso di difficile realizzazione. Il problema allora viene rilassato e ci si accontenta della sola proprietà locale. Diventa però in questo caso importante individuare la più ampia regione di asintotica stabilità, ossia il *dominio di attrazione*. La risoluzione di tale problema è in generale molto complessa.

**Esempio 9.16** Si consideri il sistema (9.4). Come visto in precedenza il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_{1,e} = [1 \ 0]^T$  è asintoticamente stabile. Tale punto tuttavia non è globalmente asintoticamente stabile in quanto il suo dominio di attrazione non coincide con l'intero spazio di stato, bensì con il solo semipiano a destra della retta di equazione  $x_1 = -1$ , di cui tale retta non fa parte.

Il sistema (??) ha invece un numero infinito di stati di equilibrio asintoticamente stabili, nessuno dei quali può pertanto esserlo in modo globale. In questo caso tuttavia non è altrettanto immediato determinare i loro domini di attrazione.  $\diamond$

**Esempio 9.17** Si consideri il sistema autonomo lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -10x_1(t) - x_2(t). \end{cases} \quad (9.7)$$

Chiaramente tale sistema ha un solo punto di equilibrio che coincide con l'origine. Infatti la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

ha autovalori  $\lambda, \lambda' = -1 \pm j10$  e la matrice di transizione dello stato vale

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos(10t) & e^{-t} \sin(10t) \\ -e^{-t} \sin(10t) & e^{-t} \cos(10t) \end{bmatrix}.$$

L'evoluzione del sistema avente origine in un generico punto  $\mathbf{x}_0 = [x_{1,0} \ x_{2,0}]^T$  vale dunque

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t} [\cos(10t)x_{1,0} + \sin(10t)x_{2,0}] \\ x_2(t) = e^{-t} [-\sin(10t)x_{1,0} + \cos(10t)x_{2,0}]. \end{cases}$$

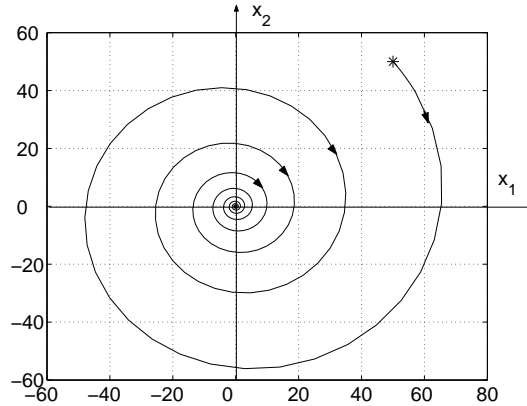
Si può facilmente osservare che l'origine è un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile perché, indipendentemente dalla condizione iniziale, l'evoluzione converge verso l'origine e per ogni  $t > t_0$  vale

$$|x_1^2(t) + x_2^2(t)| < |x_{1,0}^2 + x_{2,0}^2|.$$

A titolo esemplificativo nella Fig. 9.7 è riportata una evoluzione di tale sistema ottenuta a partire dalla condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = [50 \ 50]^T$ , indicata in figura mediante un asterisco. Tale evoluzione evidenzia la convergenza all'origine che, in virtù della globale asintotica stabilità dell'origine, si ha qualunque sia la condizione iniziale scelta.  $\diamond$

### 9.3 Stabilità secondo Lyapunov dei sistemi lineari e stazionari

In questa sezione fissiamo la nostra attenzione sui sistemi lineari, e coerentemente con quanto svolto finora, autonomi.



**Fig. 9.7.** L'evoluzione del sistema lineare (9.7) ottenuta a partire dalla condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = [50 \ 50]^T$

### 9.3.1 Stati di equilibrio

Per un sistema lineare autonomo l'eq. (9.3) si riduce a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{9.8}$$

ovvero

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + \dots + a_{2,n}x_n(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t). \end{cases}$$

Gli stati di equilibrio di un sistema lineare autonomo possono essere caratterizzati come segue.

**Proposizione 9.18** *Dato un sistema lineare autonomo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ , lo stato  $\mathbf{x}_e$  è un punto di equilibrio se e solo se è soluzione del sistema lineare omogeneo*

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_e = \mathbf{0}.$$

Da ciò derivano immediatamente i seguenti risultati.

- Se la matrice  $\mathbf{A}$  è non singolare, l'unico stato di equilibrio del sistema è  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  ossia l'origine.
- Viceversa, se  $\mathbf{A}$  è singolare allora il sistema ha un numero infinito di stati di equilibrio che descrivono uno spazio lineare: sono tutti i punti contenuti nello spazio nullo di  $\mathbf{A}$ . Un sistema lineare autonomo non può pertanto avere stati di equilibrio isolati (siano essi in numero finito o infinito), come invece è possibile nel caso dei sistemi non lineari.

*Dimostrazione.* La validità di tale proposizione segue immediatamente da quanto visto in Appendice C a proposito dei sistemi di equazioni lineari (cfr. Teorema C.42). □

**Esempio 9.19** Si consideri il sistema lineare (9.6) la cui matrice di stato è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice è non singolare essendo  $\det(\mathbf{A}) = 4$ . Da ciò segue che l'origine è l'unico stato di equilibrio del sistema. Si noti che tale risultato è in accordo con quanto detto nell'Esempio 9.12 in cui gli eventuali stati di equilibrio del sistema erano stati calcolati risolvendo il sistema lineare omogeneo  $\mathbf{A}\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ .

Analogamente, l'origine è l'unico stato di equilibrio per il sistema (9.7) considerato nell'Esempio 9.17 essendo in tal caso la matrice di stato

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

non singolare: vale infatti  $\det(\mathbf{A}) = 101$ . ◇

**Esempio 9.20** Si consideri il sistema lineare autonomo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

In tal caso il sistema ha un numero infinito di stati di equilibrio essendo la matrice  $\mathbf{A}$  singolare.

In particolare, sono stati di equilibrio tutti i punti che nello spazio di stato giacciono sulla retta di equazione  $x_1 = x_2$ . Tali punti sono infatti tutti soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

◇

### 9.3.2 Stabilità dei punti di equilibrio

Lo studio della stabilità nel caso dei sistemi lineari si semplifica notevolmente.

Il primo risultato lega la stabilità ai modi del sistema. Per questo motivo facciamo un breve richiamo a tale concetto. Si consideri una matrice  $\mathbf{A}$  di ordine  $n$ .

- Per ogni autovalore  $\lambda$  di molteplicità  $\nu$ , consideriamo i  $\nu$  modi:  $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{\nu-1}e^{\lambda t}$ .
- Ogni elemento della matrice di transizione dello stato  $e^{\mathbf{A}t}$  è una combinazione lineare dei modi corrispondenti agli autovalori.
- Tuttavia in genere nella matrice  $e^{\mathbf{A}t}$  non troviamo tutti i modi associati ad un dato autovalore  $\lambda$  di molteplicità  $\nu$  ma in genere solo i primi  $\pi$ :  $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{\pi-1}e^{\lambda t}$ . Il valore di  $\pi$  è detto indice dell'autovalore  $\lambda$  e vale  $1 \leq \pi \leq \nu$ .

**Esempio 9.21** Si considerino le seguenti matrici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si verifica immediatamente (essendo triangolari, che tutte queste matrici hanno autovalore  $\lambda_1 = -2$  di molteplicità  $\nu_1 = 3$  e autovalore  $\lambda_2 = 1$  di molteplicità  $\nu_2 = 1$ ).

Calcolando le corrispondenti matrici di transizione dello stato si ottiene:

$$e^{\mathbf{A}_1 t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{1}{2}t^2e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{A}_2 t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix},$$

$$e^{\mathbf{A}_3 t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Possiamo dunque affermare che l'autovalore  $\lambda_1 = -2$  di molteplicità  $\nu_1 = 3$  ha:

- indice  $\pi_1 = 3$  per  $\mathbf{A}_1$ , dato che nella  $e^{\mathbf{A}_1 t}$  ritroviamo tutti e tre i modi  $e^{-2t}, te^{-2t}$  e  $t^2e^{-2t}$ ;
- indice  $\pi_1 = 2$  per  $\mathbf{A}_2$ , dato che nella  $e^{\mathbf{A}_2 t}$  ritroviamo solo i due modi  $e^{-2t}$  e  $te^{-2t}$ ;
- indice  $\pi_1 = 1$  per  $\mathbf{A}_3$ , dato che nella  $e^{\mathbf{A}_3 t}$  ritroviamo solo il modo  $e^{-2t}$ .

In tutte le tre matrici l'autovalore  $\lambda_2 = 1$  ha ovviamente indice  $\pi_2 = \nu_2 = 1$ .

◇

Possiamo infine enunciare il seguente risultato.

**Teorema 9.22.** *Si consideri il sistema lineare autonomo*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

. Un generico suo stato di equilibrio  $\mathbf{x}_e$  è:

- asintoticamente stabile se e solo se tutti i modi della matrice  $e^{\mathbf{A}t}$  sono stabili;
- stabile se e solo se tutti i modi della matrice  $e^{\mathbf{A}t}$  sono stabili o al limite di stabilità;
- instabile se e solo se la matrice  $e^{\mathbf{A}t}$  ha almeno un modo instabile.

*Dimostrazione.* Si consideri per semplicità un istante di tempo iniziale  $t_0 = 0$ . Come visto in dettaglio nel Capitolo 4 l'evoluzione libera dello stato per  $t \geq 0$  vale  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$ .

Consideriamo uno stato iniziale  $\mathbf{x}_0$  corrispondente ad una perturbazione  $\Delta$  dello stato di equilibrio di cui si vuole studiare la stabilità, ossia  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_e + \Delta$ . In tal caso lo stato perturbato al generico istante di tempo  $t$  vale

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}t}(\mathbf{x}_e + \Delta) = \mathbf{x}_e + e^{\mathbf{A}t}\Delta$$

essendo per definizione di stato di equilibrio  $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_e$  in quanto ogni evoluzione che parte da uno stato di equilibrio resta indefinitamente in tale stato.

(*Asintotica stabilità*): tale condizione richiede che tutti gli elementi di  $e^{\mathbf{A}t}$  siano limitati e che per  $t$  che tende all'infinito vadano a zero. Ciò si verifica se e solo se tutti i modi sono stabili.

(*Stabilità*): tale condizione richiede che tutti gli elementi di  $e^{\mathbf{A}t}$  siano limitati. Ciò si verifica se e solo se tutti i modi sono stabili o al limite di stabilità.

(*Instabilità*): tale condizione richiede che almeno un elemento di  $e^{\mathbf{A}t}$  sia illimitato. Ciò si verifica se e solo se esiste almeno un modo instabile. □

Dal teorema appena enunciato segue la seguente proposizione che spiega perché nel caso dei sistemi lineari è lecito parlare di *sistema stabile*, ovvero *sistema asintoticamente stabile*, ovvero *sistema instabile*, anziché riferire tali proprietà al particolare stato di equilibrio.

**Teorema 9.23.** *Si consideri il sistema lineare autonomo*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).$$

- Se uno stato di equilibrio è stabile (instabile), ciò implica che anche tutti gli altri eventuali stati di equilibrio sono stabili (instabili).
- Se un suo stato di equilibrio  $\mathbf{x}_e$  è asintoticamente stabile, allora valgono i tre seguenti risultati:
  1.  $\mathbf{x}_e$  è l'unico stato di equilibrio del sistema;
  2.  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ , ovvero tale stato coincide con l'origine;
  3.  $\mathbf{x}_e$  è globalmente asintoticamente stabile, ossia il suo dominio di attrazione coincide con l'intero spazio di stato.

*Dimostrazione. (Stabilità e instabilità)* Segue immediatamente dal Teorema 9.22 perché la stabilità (instabilità) di ogni stato di equilibrio dipende unicamente dai modi della matrice  $\mathbf{A}$ .

(*Asintotica stabilità*) Sia  $\mathbf{x}_e$  uno stato di equilibrio del sistema considerato. Dal Teorema 9.22 segue che l'asintotica stabilità di  $\mathbf{x}_e$  si ha se e solo se tutti i modi sono stabili, ovvero se tutti gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  sono a parte reale negativa. Questo implica che la matrice  $\mathbf{A}$  non possa avere un autovalore  $\lambda = 0$  e dunque è non singolare. Pertanto, in virtù della Proposizione 9.18 ciò significa che  $\mathbf{x}_e$  è l'unico stato di equilibrio del sistema e coincide con l'origine. Infine, tale stato è necessariamente globalmente asintoticamente stabile. Tutti i modi sono infatti limitati e si estinguono per  $t \rightarrow \infty$  per cui ogni evoluzione converge verso l'origine. □

Dai precedenti risultati segue il seguente risultato, noto in letteratura come *criterio degli autovalori*.

**Teorema 9.24 (Criterio degli autovalori).**

*Si consideri il sistema lineare*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).$$

*Tale sistema è:*

- asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice  $A$  hanno parte reale negativa;
- stabile se e solo se la matrice  $A$  non ha autovalori a parte reale positiva e gli eventuali autovalori a parte reale nulla hanno indice unitario;
- instabile se e solo se almeno un autovalore di  $A$  ha parte reale positiva, oppure parte reale nulla e indice  $> 1$ .

*Dimostrazione.* Il risultato deriva immediatamente dal Teorema 9.22 tenendo presente che: a) tutti i modi che competono ad autovalori a parte reale negativa sono stabili; b) tutti i modi che competono ad autovalori a parte reale positiva sono instabili; c) ad un autovalore a parte reale nulla compete sempre un modo al limite di stabilità e, se esso ha indice maggiore di uno, anche uno o più modi instabili.  $\square$

**Esempio 9.25** Si consideri il sistema lineare

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \text{dove} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

la cui matrice  $\mathbf{A}$  ha autovalori  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = a$  entrambi di molteplicità unitaria. In base al Teorema 9.24 il sistema è asintoticamente stabile se  $a < 0$ , stabile (non asintoticamente) se  $a = 0$  e instabile se  $a > 0$ .  $\diamond$

**Esempio 9.26** Si consideri il sistema lineare

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \text{dove} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale sistema ha chiaramente infiniti stati di equilibrio che coincidono con tutti i punti dello spazio  $\mathbb{R}^2$ .

La matrice  $\mathbf{A}$  ha un unico autovalore  $\lambda = 0$  di molteplicità  $\nu = 2$ . È facile verificare che la matrice di transizione dello stato vale

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui si deduce che l'indice dell'autovalore vale  $\pi = 1$ . Il sistema in esame è pertanto stabile ma non asintoticamente stabile.

Infatti l'evoluzione del sistema avente origine in un generico punto  $\mathbf{x}_0 = [x_{1,0} \ x_{2,0}]^T$  vale

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0.$$

Pertanto, qualunque sia la condizione iniziale scelta, il sistema rimarrà in tale condizione in ogni istante di tempo successivo.  $\diamond$

**Esempio 9.27** Si consideri il sistema lineare

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \text{dove} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha infiniti stati di equilibrio, ossia tutti i punti lungo la retta di equazione  $x_2 = 0$ .

Anche in questo caso la matrice  $\mathbf{A}$  ha un unico autovalore  $\lambda = 0$  di molteplicità  $\nu = 2$ . La matrice di transizione dello stato vale

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e dunque l'indice dell'autovalore vale  $\pi = 2$ . Il sistema in esame è pertanto instabile.  $\diamond$

### 9.3.3 Confronto tra stabilità BIBO e stabilità alla Lyapunov

È importante a questo punto mettere in relazione i due diversi concetti di stabilità visti, ossia la BIBO stabilità e la stabilità alla Lyapunov.

Si consideri un sistema SISO descritto dal modello in termini di variabili di stato

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t). \end{cases} \quad (9.9)$$

Sia  $n$  l'ordine di tale rappresentazione, ovvero il numero di componenti del vettore  $\mathbf{x}(t)$ . La stabilità secondo Lyapunov di tale rappresentazione può essere studiata dall'analisi della matrice di stato  $\mathbf{A}$ . È tuttavia possibile studiare per tale sistema anche la BIBO stabilità. In tal caso dovremo far riferimento alla sua funzione di trasferimento che vale

$$W(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + D. \tag{9.10}$$

**Proposizione 9.28** *Si consideri un sistema SISO lineare e stazionario descritto mediante il modello in termini di variabili di stato in eq. (9.9) dove la matrice di stato  $\mathbf{A}$  ha ordine  $n$ . Sia  $W(s)$  la funzione di trasferimento in forma minima descritta in eq. (9.10).*

- *Se il sistema è asintoticamente stabile allora esso è anche BIBO stabile.*
- *Se il sistema è BIBO stabile e il denominatore della  $W(s)$  è di grado  $n$  allora esso è anche asintoticamente stabile.*

*Dimostrazione.* Il denominatore della funzione di trasferimento

$$W(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + D = \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + D$$

coincide con  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  ovvero con il polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$ .

Se il sistema è asintoticamente stabile allora tutte le radici di  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  sono a parte reale negativa. Dunque la  $W(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa ed il sistema è BIBO stabile.

Se il sistema è BIBO stabile tutti i poli della  $W(s)$  in forma minima hanno parte reale negativa. Inoltre, se il polinomio al denominatore ha grado  $n$ , allora non vi sono cancellazioni zero-polo e dunque i poli della  $W(s)$  coincidono con gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$ . Questo implica che la rappresentazione sia asintoticamente stabile. □

**Esempio 9.29** Si consideri il seguente sistema SISO lineare e stazionario

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [ 1 \quad 1 ].$$

La funzione di trasferimento di tale sistema vale

$$W(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{3s + 13}{s^2 + 2s + 101} = \frac{3s + 13}{(s + 1 + 10j)(s + 1 - 10j)}$$

per cui non vi sono cancellazioni polo-zero. Essendo inoltre i poli della  $W(s)$ ,  $p_{1,2} = -1 \pm j10$ , entrambi a parte reale negativa, tale sistema è BIBO stabile. In virtù della Proposizione 9.28 segue che tale sistema è anche asintoticamente stabile, o più precisamente l'origine è un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile. ◇

Si noti che se la funzione di trasferimento non fosse in forma minima, la BIBO stabilità non implicherebbe la stabilità (asintotica o meno). Potrebbe infatti accadere che, a causa di cancellazioni zero-polo, uno o più modi della rappresentazione in termini di variabili di stato non siano presenti nella rappresentazione ingresso-uscita. Se tali modi fossero proprio gli unici modi instabili del sistema, questo sarebbe risultato BIBO stabile pur non essendo stabile secondo Lyapunov.

**Esempio 9.30** Si consideri il seguente sistema SISO lineare e stazionario

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 1].$$

Tale sistema non è stabile secondo Lyapunov in base al criterio degli autovalori essendo gli autovalori di  $\mathbf{A}$  pari a  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 2$ .

Tuttavia tale sistema è BIBO stabile essendo

$$W(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = [1 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{-3}{(s+1)(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2(s-2)}{(s+1)(s-2)} = \frac{2}{s+1}$$

e dunque l'unica radice dell'equazione caratteristica vale  $p = -1$  e ha parte reale negativa.  $\diamond$

È importante infine osservare che se un sistema è stabile secondo Lyapunov ma non asintoticamente stabile, allora esso non è necessariamente BIBO stabile.

**Esempio 9.31** Si consideri il seguente sistema SISO lineare e stazionario

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 1].$$

Tale sistema è stabile secondo Lyapunov in base al criterio degli autovalori. Infatti gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 0$  e l'autovalore nullo ha molteplicità, e dunque indice, unitario.

Tuttavia tale sistema non è BIBO stabile perché la sua funzione di trasferimento

$$W(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{2s+1}{s(s+1)}$$

ha un polo a parte reale nulla.  $\diamond$