4

Analisi nel dominio del tempo delle rappresentazioni in variabili di stato

Versione del 15 marzo 2020 ad uso degli studenti di Ing. Biomedica che seguono il corso e-learning di Analisi dei Sistemi

In questo capitolo[1] si affronta lo studio, nel dominio del *tempo*, dei modelli di sistemi lineari, stazionari e a parametri concentrati descritti in termini di *variabili di stato*. Nella prima sezione si ricorda in cosa consiste per tali modelli il *problema fondamentale dell'analisi dei sistemi*. Per risolvere tale problema occorre determinare la *matrice di transizione dello stato*. Nella terza sezione si presenta la soluzione al problema di analisi che viene espressa tramite la *formula di Lagrange*. Nella quarta sezione si studia una particolare trasformazione di variabili, detta *trasformazione di similitudine*, che consente di passare da una rappresentazione in variabili di stato ad una diversa rappresentazione in variabili di stato sempre dello stesso sistema: ciò che distingue le due rappresentazioni è la scelta delle grandezze assunte quali variabili di stato. Una particolare trasformazione di similitudine, detta *diagonalizzazione*, permette in molti casi di passare ad una nuova rappresentazione (più facile da analizzare) in cui la matrice di stato è nella *forma canonica diagonale*: questa procedura è presentata nella quinta sezione.

4.1 Rappresentazione in variabili di stato e problema di analisi

Un sistema lineare e stazionario di ordine n, con r ingressi e p uscite, ha la seguente rappresentazione in termini di *variabili di stato* (VS):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) & = & \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{array} \right. \tag{4.1}$$

dove il *vettore di stato* $\boldsymbol{x}(t)$ e la sua derivata $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ hanno n componenti, il *vettore degli ingressi* $\boldsymbol{u}(t)$ ha r componenti e il *vettore delle uscite* $\boldsymbol{y}(t)$ ha p componenti.

[1] Questo documento contiene una versione ridotta delle prime tre sezioni del capitolo 4 del testo: A. Giua, C. Seatzu, Analisi dei sistemi dinamici, Springer-Verlag Italia, II edizione, 2009.

Il *problema fondamentale dell'analisi dei sistemi* per un tale sistema consiste nel determinare:

- l'andamento dello stato $\boldsymbol{x}(t)$ per $t \geq 0$,
- l'andamento dell'uscita $\boldsymbol{y}(t)$ per $t \geq 0$,

note le seguenti cause agenti sul sistema:

- il valore dello stato iniziale $\boldsymbol{x}(0)$,
- l'andamento dell'ingresso $\boldsymbol{u}(t)$ per $t \geq 0$.

Essendo tale sistema lineare, in base al principio di sovrapposizione degli effetti possiamo anche scrivere l'evoluzione dello stato per $t \geq 0$ come la somma di due termini:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_\ell(t) + \boldsymbol{x}_f(t).$$

- Il termine $\boldsymbol{x}_\ell(t)$ corrisponde all'*evoluzione libera dello stato* a partire dalle condizioni iniziali $\boldsymbol{x}(0)$ date, supponendo l'ingresso nullo.
- Il termine $\boldsymbol{x}_f(t)$ corrisponde all'*evoluzione forzata dello stato* conseguente all'applicazione dell'ingresso dato supponendo condizioni iniziali $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$.

Nota l'evoluzione dello stato, l'evoluzione dell'uscita per $t \geq 0$ si può scrivere in base alla trasformazione di uscita in eq. (4.1)

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) = \underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_\ell(t)}_{\boldsymbol{y}_\ell(t)} + \underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_f(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)}_{\boldsymbol{y}_f(t)}$$

dove riconosciamo due termini:

- Il termine $\boldsymbol{y}_\ell(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_\ell(t)$ corrisponde all'*evoluzione libera dell'uscita* a partire dalle condizioni iniziali $\boldsymbol{x}(0)$ date, supponendo l'ingresso nullo.
- Il termine $\boldsymbol{y}_f(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_f(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$ corrisponde all'*evoluzione forzata dell'uscita* conseguente all'applicazione dell'ingresso dato supponendo condizioni iniziali $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$.

4.2 La matrice di transizione dello stato

La soluzione del problema di analisi per modelli VS è fornita dalla cosiddetta formula di Lagrange che verrà descritta in seguito. Preliminarmente, tuttavia, è utile introdurre la nozione di *matrice di transizione dello stato* che viene descritta nella sezione seguente.

4.2.1 Definizione e proprietà

Data una matrice quadrata $\boldsymbol{A}$ il suo *esponenziale* (cfr. Appendice C, § C.2.6) è la matrice

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}.$$

La matrice di transizione dello stato $e^{\boldsymbol{A}t}$ è una particolare matrice esponenziale i cui elementi sono funzioni del tempo.

Definizione 4.1 *Dato un modello in VS* (4.1) *in cui la matrice $\boldsymbol{A}$ ha dimensione $n \times n$, si definisce* matrice di transizione dello stato *la matrice $n \times n$*

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}. \tag{4.2}$$

Si noti che tale serie è sempre convergente e dunque la matrice di transizione dello stato è ben definita per ogni matrice quadrata $\boldsymbol{A}$.

In genere non è agevole determinare la matrice di transizione dello stato a partire dalla sua definizione, e si è soliti ricorrere ad altre procedure che saranno discusse nei paragrafi seguenti. In un caso particolare, tuttavia, il calcolo di $e^{\boldsymbol{A}t}$ risulta immediato: quando $\boldsymbol{A}$ è una matrice diagonale.

Proposizione 4.2 *Se $\boldsymbol{A}$ è una matrice diagonale di dimensione $n \times n$*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \textit{vale} \qquad e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Dimostrazione. Vale

$$\boldsymbol{A}t = \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n t \end{bmatrix},$$

e, poiché tale matrice è diagonale, il risultato deriva dalla Proposizione C.25.

□

Esempio 4.3 Data $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ vale $e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$. ◇

Ricordiamo infine una proprietà fondamentali di cui gode la $e^{\boldsymbol{A}t}$.

Proposizione 4.4 (Derivata della matrice di transizione dello stato) *Vale*

$$\frac{d}{dt} e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A} e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{A}.$$

Dimostrazione. Per dimostrare la prima eguaglianza si derivi l'eq. (4.2); si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\boldsymbol{A}t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k k t^{k-1}}{k!} = \boldsymbol{A} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = \boldsymbol{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!} \\ &= \boldsymbol{A} e^{\boldsymbol{A}t}. \end{aligned}$$

Mettendo invece in evidenza $\boldsymbol{A}$ a destra, si dimostra la seconda eguaglianza.

□

Si noti che dalla precedente proprietà deriva anche un fatto importante: $\boldsymbol{A}$ *commuta con* $e^{\boldsymbol{A}t}$ (cfr. § C.2.4).

4.2.2 Lo sviluppo di Sylvester

Ci si pone ora il problema di determinare l'espressione analitica della matrice di transizione dello stato $e^{\boldsymbol{A}t}$ senza dover necessariamente calcolare la serie infinita che la definisce. La procedura che qui presentiamo si basa sullo *sviluppo di Sylvester*[2]. Una seconda procedura, basata sul passaggio alla forma diagonale o alla forma di Jordan verrà presentata in § **??** e § **??**. Infine, una terza procedura, basata sull'uso delle trasformate di Laplace, verrà presentata nel Capitolo 6 (cfr. Proposizione 6.5).

Vale il seguente risultato, la cui dimostrazione è data nell'Appendice G (cfr. Proposizione G.5).

Proposizione 4.5 (Sviluppo di Sylvester) *Se $\boldsymbol{A}$ è una matrice di dimensione $n \times n$, la corrispondente matrice di transizione dello stato $e^{\boldsymbol{A}t}$ può essere scritta come:*

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(t)\boldsymbol{A}^i = \beta_0(t)\boldsymbol{I} + \beta_1(t)\boldsymbol{A} + \cdots + \beta_{n-1}(t)\boldsymbol{A}^{n-1}, \tag{4.3}$$

dove i coefficienti dello sviluppo $\beta_i(t)$ sono opportune funzioni scalari del tempo.

I coefficienti dello sviluppo di Sylvester possono venir determinati risolvendo un sistema di equazioni lineari. Discuteremo separatamente vari casi.

Autovalori di molteplicità unitaria

Se la matrice $\boldsymbol{A}$ ha autovalori tutti distinti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, le n funzioni incognite $\beta_i(t)$ si ricavano risolvendo il seguente sistema di n equazioni (tante equazioni quanti sono gli autovalori):

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda_1\beta_1(t) + \lambda_1^2\beta_2(t) + \cdots + \lambda_1^{n-1}\beta_{n-1}(t) & = e^{\lambda_1 t} \\ \beta_0(t) + \lambda_2\beta_1(t) + \lambda_2^2\beta_2(t) + \cdots + \lambda_2^{n-1}\beta_{n-1}(t) & = e^{\lambda_2 t} \\ \qquad\qquad\vdots & \quad\vdots \\ \beta_0(t) + \lambda_n\beta_1(t) + \lambda_n^2\beta_2(t) + \cdots + \lambda_n^{n-1}\beta_{n-1}(t) & = e^{\lambda_n t} \end{cases} \tag{4.4}$$

ovvero risolvendo il sistema di equazioni lineari

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\eta} \tag{4.5}$$

dove $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0(t) & \beta_1(t) & \cdots & \beta_{n-1}(t) \end{bmatrix}^T$ è il vettore delle incognite, la matrice dei coefficienti vale[3]

[2] James Joseph Sylvester (Londra, Inghilterra, 1814 - 1897).

[3] Un matrice che assume la forma della eq. (4.6) è detta *matrice di Vandermonde* in onore di Alexandre-Théophile Vandermonde (Parigi, Francia, 1735 - 1796). L'attribuzione è nata da un malinteso, poiché il matematico francese non studiò tali strutture.

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

e il vettore dei termini noti vale $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}^T$.

La generica componente del vettore $\boldsymbol{\eta}$ è una funzione del tempo $e^{\lambda t}$ che viene detta *modo* della matrice $\boldsymbol{A}$ associato all'autovalore λ. Si verifica facilmente che ogni elemento della matrice $e^{\boldsymbol{A}t}$ è combinazione lineare di tali modi. Per una discussione completa sui modi si rimanda al § **??** alla fine di questo capitolo.

Esempio 4.6 Si consideri la matrice 2×2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Essendo $\boldsymbol{A}$ triangolare i suoi autovalori coincidono con gli elementi lungo la diagonale. Tale matrice ha dunque autovalori distinti $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Per determinare $e^{\boldsymbol{A}t}$ scriviamo il sistema

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda_1\beta_1(t) & = e^{\lambda_1 t} \\ \beta_0(t) + \lambda_2\beta_1(t) & = e^{\lambda_2 t} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \beta_0(t) - \beta_1(t) & = e^{-t} \\ \beta_0(t) - 2\beta_1(t) & = e^{-2t} \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \beta_0(t) & = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ \beta_1(t) & = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t} &= \beta_0(t)\boldsymbol{I}_2 + \beta_1(t)\boldsymbol{A} \\ &= (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Come atteso, ogni elemento della matrice $\boldsymbol{A}$ è una combinazione dei due modi e^{-t} e e^{-2t}. ◇

Autovalori di molteplicità non unitaria

Se la matrice $\boldsymbol{A}$ ha autovalori di molteplicità non unitaria, si costruisce un sistema simile a (4.4) in cui ad ogni autovalore λ di molteplicità ν corrispondono ν equazioni della forma[4]:

[4] Si noti che in questa espressione si deve calcolare la derivata del primo e del secondo membro rispetto al parametro λ (visto come variabile) e non rispetto alla variabile t.

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda\beta_1(t) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(t) &= e^{\lambda t} \\ \dfrac{d}{d\lambda}\left(\beta_0(t) + \lambda\beta_1(t) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(t)\right) &= \dfrac{d}{d\lambda}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{d^{\nu-1}}{d\lambda^{\nu-1}}\left(\beta_0(t) + \lambda\beta_1(t) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(t)\right) &= \dfrac{d^{\nu-1}}{d\lambda^{\nu-1}}e^{\lambda t} \end{cases} \tag{4.7}$$

ovvero

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda\beta_1(t) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(t) &= e^{\lambda t} \\ \beta_1(t) + 2\lambda\beta_2(t) + \cdots + (n-1)\lambda^{n-2}\beta_{n-1}(t) &= te^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{(\nu-1)!}{0!}\beta_{\nu-1}(t) + \cdots + \frac{(n-1)!}{(n-\nu)!}\lambda^{n-\nu}\beta_{n-1}(t) &= t^{\nu-1}e^{\lambda t}. \end{cases} \tag{4.8}$$

Anche in tal caso è possibile scrivere un sistema lineare della forma (4.5) dove ad ogni autovalore λ di molteplicità ν sono associate ν righe della matrice dei coefficienti[5] $\boldsymbol{V}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{\nu-1} & \cdots & \lambda^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda & \cdots & (\nu-1)\lambda^{\nu-2} & \cdots & (n-1)\lambda^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (\nu-1)! & \cdots & \frac{(n-1)!}{(n-\nu)!}\lambda^{n-\nu} \end{bmatrix}$$

e ν righe del vettore dei termini noti $\boldsymbol{\eta}$: $\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & t^{\nu-1}e^{\lambda t} \end{bmatrix}^T$.

Esempio 4.7 Si consideri la matrice 3×3

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico $P(s) = (s-3)^2(s+1)$ e dunque ha autovalore $\lambda_1 = 3$ di molteplicità 2 e $\lambda_2 = -1$ di molteplicità 1. Per determinare $e^{\boldsymbol{A}t}$ scriviamo il sistema

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda_1\beta_1(t) + \lambda_1^2\beta_2(t) = e^{\lambda_1 t} \\ \beta_1(t) + 2\lambda_1\beta_2(t) = te^{\lambda_1 t} \\ \beta_0(t) + \lambda_2\beta_1(t) + \lambda_2^2\beta_2(t) = e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta_0(t) + 3\beta_1(t) + 9\beta_2(t) = e^{3t} \\ \beta_1(t) + 6\beta_2(t) = te^{3t} \\ \beta_0(t) - \beta_1(t) + \beta_2(t) = e^{-t} \end{cases}$$

da cui si ricava

[5] Una matrice che assume questa forma è detta *matrice di Vandermonde confluente*.

$$\begin{cases} \beta_0(t) = \frac{1}{16}\left(7e^{3t} - 12te^{3t} + 9e^{-t}\right) \\ \beta_1(t) = \frac{1}{8}\left(3e^{3t} - 4te^{3t} - 3e^{-t}\right) \\ \beta_2(t) = \frac{1}{16}\left(-e^{3t} + 4te^{3t} + e^{-t}\right). \end{cases}$$

Dunque

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t} &= \beta_0(t)\boldsymbol{I}_3 + \beta_1(t)\boldsymbol{A} + \beta_2(t)\boldsymbol{A}^2 \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & te^{3t} \\ (0.5e^{3t} - 0.5e^{-t}) & e^{-t} & (0.25e^{3t} + 0.5te^{3t} - 0.25e^{-t}) \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

◇

4.3 Formula di Lagrange

Possiamo finalmente dimostrare un importante risultato che determina la soluzione al problema di analisi per i sistemi MIMO precedentemente enunciato. Tale risultato è noto con il nome di *formula di Lagrange*.

Qui presentiamo questo risultato in forma semplificata, supponendo che l'ingresso applicato al sistema sia nullo, ovvero che la sola causa di evoluzione sia la presenza di uno stato iniziale. Trascurando i termini che dipendono dall'ingresso, il sistema (4.1) si riconduce alla forma semplificata

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases} \tag{4.9}$$

Teorema 4.8 (Formula di Lagrange) *La soluzione del sistema* (4.9), *con stato iniziale* $\boldsymbol{x}(0)$, *vale per* $t \geq 0$*:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) \\ \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\, e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0). \end{cases} \tag{4.10}$$

Dimostrazione. Si dimostra il primo di questi due risultati, verificando che il valore $\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$ sostituito nella prima equazione del sistema 4.9 porta ad un eguaglianza fra primo e secondo membro.

Sostituendo al primo membro dell'equazione di stato in eq. 4.9 si ottiene:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)\right) = \left(\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t}\right)\, \boldsymbol{x}(0) \quad = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{x}(0).$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla Proposizione 4.4.

Sostituendo al secondo membro dell'equazione di stato in eq. 4.9 si ottiene:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\,e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0).$$

Ciò dimostra che $\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$ è il segnale cercato.

La seconda formula di Lagrange si ottiene sostituendo l'espressione di $\boldsymbol{x}(t)$ così determinata nella trasformazione di uscita della (4.9):

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{C}\,e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0).$$

$\square$

Si noti che poiché abbiamo considerato il caso di un sistema senza ingresso, l'evoluzione determinata è la cosiddetta evoluzione libera.

Il termine

$$\boldsymbol{x}_\ell(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$$

corrisponde all'*evoluzione libera dello stato* a partire dalle condizioni iniziali $\boldsymbol{x}(0)$. Si noti che matrice $e^{\boldsymbol{A}t}$ è un operatore che indica appunto come avviene la *transizione* dallo stato $\boldsymbol{x}(0)$ allo stato $\boldsymbol{x}(t)$ in assenza di contributi dovuti all'ingresso.

Il termine

$$\boldsymbol{y}_\ell(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_\ell(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$$

corrisponde all'*evoluzione libera dell'uscita* a partire dalle condizioni iniziali $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(0)$.

Esempio 4.9 Data la seguente rappresentazione in termini di variabili di stato:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.11}$$

si vuole calcolare per $t \geq 0$ l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita a partire da uno stato iniziale

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

La matrice di transizione dello stato per questa rappresentazione può calcolarsi immediatamente (vedi anche Esempio 4.3) essendo la matrice di stato diagonale e vale

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Possiamo dunque calcolare immediatamente l'evoluzione libera dello stato che per $t \geq 0$ vale:

$$\boldsymbol{x}_\ell(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} \\ 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

mentre l'evoluzione libera dell'uscita per $t \geq 0$ vale:

$$y_\ell(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_\ell(t) = \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 3e^{-t} \\ 4e^{-2t} \end{array}\right] = 6e^{-t} - 4e^{-2t}.$$

$\diamond$

Nelle sezioni seguenti di questo capitolo si vedrà una tecnica per determinare la matrice di transizione dello stato nel caso particolare in cui la matrice di stato possa essere ricondotta, mediante trasformazione di similitudine, in forma diagonale.

Infine nel capitolo 6 si presenterà un metodo generale per calcolare la matrice di transizione dello stato di una rappresentazione qualunque. Tale metodo, che si basa sull'uso delle trasformate di Laplace, consente anche di determinare agevolmente l'evoluzone forzata dello stato e dell'uscita.

4.4 Modi di un modello in variabili di stato

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che la matrice di transizione dello stato di una matrice diagonale $\boldsymbol{A}$ di dimensione $n \times n$

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{array}\right] \qquad \text{vale} \qquad e^{\boldsymbol{A}t} = \left[\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{array}\right].$$

Si osserva che gli elementi lungo la diagonale della matrice $\boldsymbol{A}$ sono i suoi autovalori λ_i ($i = 1, \ldots, n$) ovvero le radici del polinomio caratteristico della matrice stessa $|\ s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\ |$. Gli elementi lungo la diagonale della matrice di transisione dello stato $e^{\boldsymbol{A}t}$ sono funzioni del tempo della forma $e^{\lambda_i t}$ ($i = 1, \ldots, n$): tali funzioni sono dette *modi*.

Si può anche osservare (vedi Esempio 4.9) che in conseguenza di ciò le componenti del vettore $\boldsymbol{x}_\ell(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\ \boldsymbol{x}(0)$ sono combinazioni lineari di tali modi e ugualmente lo sono le componenti dell'evoluzione libera dell'uscita $\boldsymbol{y}_\ell(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\ \boldsymbol{x}(0)$. Questo risultato, dunque è del tutto analogo a quanto abbiamo visto nello studio dei modelli ingresso-uscita, dove abbiamo dimostrato che l'evoluzione libera è una combinazione libera del modi del sistema, associati in quel caso alla radici del polinomio caratteristico dell'omogenea associata $P(s)$.

La trattazione qui svolta considera il caso particolare di matrici $\boldsymbol{A}$ diagonali. Vedremo, tuttavia, che tale risultato potrà generalizzarsi al caso di matrici non diagonali: anche in questo caso sarà possibile definire modi del sistema le funzioni $e^{\lambda_i t}$ associate agli autovalori. Nel caso di un autovalore λ di molteplicità $\nu > 0$ potranno ad esso associarsi modi più complessi del tipo $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{\pi-1}e^{\lambda t}$, dove il termine di ordine maggiore è caratterizzato dal valore $\pi \leq \nu$ detto *indice* dell'autovalore λ. Rimandiamo, per una trattazione più chiara ed esaustiva di tale argomento, allo studio della *forma di Jordan* di una matrice.