Analisi dei Sistemi — Esercitazione 3

Corso di laurea in Ingegneria Biomedica 2019/2020

Esercizio 1. È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 2 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si calcolino gli autovalori, gli autovettori e i modi della matrice A.
2. Si calcoli, mediante lo sviluppo di Sylvester, la matrice di transizione dello stato e^{At} e si verifichi che ogni suo elemento è una combinazione lineare di modi.
3. Si verifichi che l'inversa della matrice di transizione dello stato vale e^{-At}.
4. Si determini, se possibile, una trasformazione di similitudine $z(t) = Px(t)$ che permetta di passare ad una rappresentazione in cui la matrice di stato $\Lambda = P^{-1}AP$ è in forma diagonale. Si discuta se tale trasformazione è unica.
5. Determinata una trasformazione diagonalizzante, si calcoli la corrispondente rappresentazione.
6. Si determini lo stato inziale $z(0)$ della rappresentazione diagonale che corrisponde allo stato iniziale $x(0) = [1 \;\; 2]^T$ della rappresentazione originale.
7. - *Domanda modificata* - Si determini, mediante la formula di Lagrange, l'evoluzione libera dello stato $z_\ell(t)$ della rappresentazione diagonale a partire dalla condizione iniziale data al punto precedente.
8. - *Domanda modificata* - Si determini, nelle stesse condizioni del punto precedente, l'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ della rappresentazione originale.
9. - *Domanda modificata* - Si determini, nelle stesse condizioni del punto precedente, l'evoluzione libera dell'uscita $y_\ell(t)$. Si dimostri perchè tale valore non dipende dalla rappresentazione considerata.

Esercizio 2. Si determinino i modi relativi alle seguenti matrici in forma di Jordan e si scrivano le corrispondenti matrici di transizione dello stato:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$