

Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 17 aprile 2026

Alessandro Giua — giua@unica.it

Esercizio 1. (5 punti) Si consideri la seguente funzione nel dominio di Laplace:

$$\text{(Testo A)} \quad F(s) = \frac{2s + 1}{2s^2 + 8s + 8}; \quad \text{(Testo B)} \quad F(s) = \frac{s - 2}{3s^2 + 6s + 3}.$$

- (a) (3 punti) Si determini la sua antitrasformata $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$.
- (b) (2 punti) La funzione $f(t)$ è la somma di due termini: quale fra essi si estingue prima?

Esercizio 2. (7 punti) Si consideri il sistema caratterizzato dalla seguente equazione differenziale omogenea

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + c y(t) = 0$$

dove i coefficienti b e c valgono:

- (Testo A): **Caso 1:** $b = 2, c = 2$, **Caso 2:** $b = 4, c = 8$.
- (Testo B): **Caso 1:** $b = 4, c = 5$, **Caso 2:** $b = 8, c = 20$.

- (a) (3 punti) Si determinino i modi del sistema in entrambi i casi, calcolandone i parametri caratteristici: costante di tempo, pulsazione naturale, coefficiente di smorzamento.
- (b) (2 punti) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso e si discuta quale sia il significato geometrico di pulsazione naturale e coefficiente di smorzamento.
- (c) (2 punti) Si discuta come cambia tra i due casi lo smorzamento e il tempo di assestamento e, sulla base di quanto discusso, si tracci qualitativamente l'andamento dei modi.

Esercizio 3. (7 punti) Si consideri un sistema descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\text{(Testo A)} \quad 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 4u(t); \quad \text{(Testo B)} \quad 4 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 8u(t).$$

- (a) (3 punti) Si determini l'evoluzione libera a partire dalla condizione iniziale $y(0) = \mu$, dove $\mu \in \{1, 2, \dots, 12\}$ è il numero del proprio mese di nascita (es., 1 = gennaio, ...).
- (b) (4 punti) Determinare l'evoluzione forzata assumendo come ingresso $u(t) = t\delta_{-1}(t)$.

Esercizio 4. (11 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario

$$\text{(Testo A)} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$\text{(Testo B)} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

(a) (1 punto) Si determinino autovalori e modi della matrice A .

(b) (2 punti) Data la matrice di similitudine

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

si determini una rappresentazione $\{A', B', C', D'\}$ simile alla rappresentazione originaria.

(c) (1 punto) Si verifichi che A' , matrice di stato della rappresentazione simile, è diagonale. In tal caso, cosa può dirsi della matrice di similitudine P ?

(d) (2 punti) Si determini la matrice $e^{A't}$ e, per similitudine, la matrice e^{At} .

(e) (3 punti) Si determini l'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$ del sistema dato a partire dallo stato iniziale $x(0) = [1 \ -1]^T$.

(f) (2 punti) Si discuta, motivando la risposta, per quali valori dello stato iniziale si ottengono le seguenti evoluzioni libere:

$$\text{(Testo A)} \quad (i) \quad y_\ell(t) = 2 + 3e^{-t}, \quad (ii) \quad y'_\ell(t) = -e^{-2t} + te^{-t}.$$

$$\text{(Testo B)} \quad (i) \quad y_\ell(t) = 3 + 3e^{-2t}, \quad (ii) \quad y'_\ell(t) = e^{-2t} - te^{-2t}.$$

Se non esistono valori dello stato iniziale che portano a tali evoluzioni si spieghi perché.