Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 17 aprile 2025

Alessandro Giua — giua@unica.it

Esercizio 1. (12 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

(a) *(4 punti)* Si determini la trasformata di Laplace della sequente funzione e si tracci il suo grafico.

$$\text{(Testo A)} \qquad f(t) = \delta_{-1}(t) - e^{2(t-3)}\delta_{-1}(t-3).$$

$$\text{(Testo B)} \qquad f(t) = -\delta_{-1}(t) + e^{3(t-2)}\delta_{-1}(t-2).$$

(b) *(4 punti)* Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso-uscita

$$\text{(Testo A)} \quad (1+\alpha)\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + (2-\beta)\,u(t)\,y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\,\frac{du(t)}{dt} + \alpha\,t^2\,u(t),$$

$$\text{(Testo B)} \quad \beta\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1+\alpha)\,\frac{dy(t)}{dt}\,y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha\,t^2\,\frac{du(t)}{dt} + u(t),$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono parametri incogniti costanti. Si discuta, al variare dei parameri α e β, se il sistema è: lineare, stazionario, dinamico e proprio, giustificando la risposta.

Un sistema lineare e stazionario del terzo ordine ha la sequente evoluzione libera per $t \geq 0$:

$$\text{(Testo A)} \quad y_\ell(t) = 2 + te^{-2t}, \qquad \text{(Testo B)} \quad y_\ell(t) = 1 + 2te^{-t}.$$

(i) Si determinino i modi di tale sistema.

(ii) Si determini il polinomio caratteristico della equazione omogenea.

(iii) Quali condizioni iniziali dell'uscita hanno prodotto l'evoluzione libera data?

(iv) Quale sarebbe l'evoluzione libera a partire dalle condizioni iniziali $y(0) = 4, \dot{y}(0) = 2, \ddot{y}(0) = 4$?

Esercizio 2. (6 punti) Si consideri un sistema descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\text{(Testo A)} \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 16u(t)$$

$$\text{(Testo B)} \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 25u(t)$$

Si determini l'evoluzione forzata del sistema conseguente ad un ingresso $u(t) = e^{3t}\delta_{-1}(t)$.

Esercizio 3. (14 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$\text{(Testo A)} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(Testo B)} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) *(1 punti)* Si indichi la dimensione dei vettori $u(t)$, $x(t)$ e $y(t)$.

(b) *(3 punti)* Si determinino i modi della matrice A, tracciandone l'andamento qualitativo e determinandone se possibile il tempo di assestamento.

(c) *(3 punti)* Si determini una trasformazione di similitudine $x(t) = Pz(t)$ che porta ad una rappresentazione in cui la matrice di stato Λ è in forma diagonale. Quanto vale la matrice di transizione dello stato $e^{\Lambda t}$?

(d) *(5 punti)* Si determini la matrice di transizione dello stato e^{At} per la rappresentazione originaria e si calcoli l'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$ dato lo stato iniziale $x(0) = [1 \;\; 4]^T$.