Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 16 aprile 2024

Alessandro Giua — giua@unica.it

Esercizio 1. (8 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

(a) *(4 punti)* Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso-uscita

(Testo A) $(1+\alpha)\dot{y}(t) + y(t) + \alpha = u(t)$ (Testo B) $\dot{y}(t) + \alpha t^2 y(t) = 2u(t) + (2-\alpha)u^2(t),$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro incognito costante. Si discuta come variano le proprietà di linearità, stazionarietà e dinamicità in funzione dei valori assunti dal parametro α, giustificando la risposta.

(b) *(4 punti)* Un modello ingresso-uscita è caratterizzato da un polinomio caratteristico con le sequenti radici:

(Testo A) $p_1, p_1' = -1 \pm j5, \quad p_2 = -2,$ (Testo B) $p_1, p_1' = -2 \pm j8, \quad p_2 = -1.$

(i) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso.

(ii) Si determinino i modi che ad esse corrispondono, classificandoli e calcolandone i parametri caratteristici (costante di tempo, coefficiente di smorzamento, pulsazione naturale).

(iii) Si tracci l'andamento dei modi e si discuta a quale compete il minore tempo di assestamento.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri un sistema descritto dal seguente modello ingresso-uscita

(Testo A) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\dfrac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = u(t),$ (Testo B) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} - 2\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2u(t).$

(a) *(5 punti)* Si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=0} = 1, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 3.$$

(b) *(5 punti)* Si determini l'evoluzione forzata del sistema conseguente ad un ingresso $u(t) = 2\delta_{-1}(t)$.

Esercizio 3. (12 punti) È data la seguente rappresentazione in termini di variabili di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

(Testo A) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$

(Testo B) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$

(a) *(1 punto)* Si discuta quali siano le dimensioni dei vettori di ingresso, stato e uscita.

(b) *(4 punti)* Si discuta se la matrice di stato A sia diagonalizzabile e, in tal caso, si determini una rappresentazione diagonale $\{A', B', C', D'\}$ simile a quella data.

(c) *(4 punti)* Si calcoli la matrice di transizione dello stato e^{At}.

(d) *(3 punti)* Si determini la risposta libera dello *stato* e dell'*uscita* di tale sistema a partire dallo stato iniziale $x(0) = [\,1\ 2\,]^T$.