Elementi di Analisi dei Sistemi

Seconda prova intermedia - 1 giugno 2022

Alessandro Giua — giua@unica.it

Esercizio 1. (8 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

(a) (4 punti) È possibile che la funzione di risposta armonica $W(j\omega)$ di un sistema lineare e stazionario assuma

(Testo A) *modulo infinito*, (Testo B) *modulo nullo*,

per un valore finito di pulsazione $\bar{\omega} = 4\,rad/s$? Se la risposta è negativa si spieghi perché. Se la risposta è positiva, si dia un esempio e lo si commenti.

(b) (4 punti) Si enunci il criterio che consente di valutare la stabilità secondo Lyapunov di un sistema lineare autonomo descritto dall'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ in funzione degli autovalori della matrice A.
Nota bene: questa domanda vuole valutare la preparazione generale e verrà valutata comparativamente anche in base alla chiarezza espositiva e proprietà di linguaggio nella risposta.

Sulla base di tale criterio si discuta come varia, al variare del parametro $\eta \in \mathbb{R}$, la stabilità del sistema caratterizzato dalla seguente matrice di stato:

$$\text{Testo A:}\quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \eta \end{bmatrix}, \qquad \text{Testo B:}\quad A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. (10 punti) È data la seguente funzione di trasferimento:

$$\text{(Testo A)}\quad W(s) = \frac{25s}{10s^2 + 84s + 32}, \qquad \text{(Testo B)}\quad W(s) = \frac{280s}{s^2 + 93s + 270}.$$

(a) (2 punti) Si riporti tale funzione in forma di Bode, indicando tutti i parametri che la caratterizzano.

(b) (6 punti) Si tracci il diagramma di Bode di tale funzione.

(c) (2 punti) Tale diagramma caratterizza un filtro passa-basso, passa-alto o passa-banda? Si mostri come calcolare la banda passante a $-6dB$ sul diagramma.

Esercizio 3. (12 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$\text{(Testo A)}\qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = [1],$$

$$\text{(Testo B)}\qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad D = [2].$$

(a) (4 punti) Si determini la matrice risolvente e la matrice di transizione dello stato di tale sistema.

(b) (2 punti) Si determinino gli autovalori di A indicando il valore della loro molteplicità ν e indice π. Quali sono i modi di tale sistema?

(c) (2 punti) Data una condizione iniziale $x(0) = [\,2 \quad \alpha\,]^T$, si discuta se esiste un valore della costante α per cui l'evoluzione libera dell'uscita valga

(Testo A): $y_\ell(t) = 4e^{-2t}$, (Testo B): $y_\ell(t) = 4e^{-3t}$,

per $t \geq 0$.

(d) (4 punti) Si determini l'evoluzione forzata dello stato $x_f(t)$ che consegue all'applicazione di un segnale di ingresso $u(t) = e^{-t}\,\delta_{-1}(t)$.