Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 20 aprile 2022

Alessandro Giua — giua@unica.it

Esercizio 1. **(12 punti)** Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

(a) **(4 punti)**

(Testo A) Si discuta che cosa si intende per modello ingresso-uscita, ricordando che forma esso assume nel caso generale e indicando tutte le grandezze che lo caratterizzano.

(Testo B) Si discuta che cosa si intende per modello in variabili di stato, ricordando che forma esso assume nel caso generale e indicando tutte le grandezze che lo caratterizzano.

(b) **(4 punti)** Si consideri il sistema descritto dal modello

$$\text{(Testo A)} \qquad \frac{d^3y(t)}{dt^3} - \frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1-\varrho)t^2\frac{dy(t)}{dt} + y^{\eta}(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\frac{du(t)}{dt},$$

$$\text{(Testo B)} \qquad 2\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - \eta e^t\, y(t) = 4\frac{du(t)}{dt} + 4(u(t)+\varrho),$$

dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare, stazionario e dinamico per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$. Motivare la risposta.

(c) **(4 punti)**

Si consideri il sistema caratterizzato dalla sequente equazione differenziale omogenea

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + \eta y(t) = 0,$$

dove il parametro costante

$$\text{(Testo A)} \quad \eta \in \{20, 68\}, \qquad\qquad \text{(Testo B)} \quad \eta \in \{13, 40\},$$

può assumere due valori. Si verifichi che l'evoluzione di tale sistema è caratterizzata, in entrambi i casi, da un modo pseudoperiodico.

(i) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso e se ne determinino i parametri caratteristici (costante di tempo, pulsazione naturale, coefficiente di smorzamento) per entrambi i valori del parametro η.

(ii) Si discuta come il valore di η influisca sullo smorzamento e sul tempo di assestamento.

(iii) Si traccino qualitativamente i modi nei due casi.

Esercizio 2. (6 punti) Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\text{(Testo A)}\quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 7\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = -2u(t), \qquad \text{(Testo B)}\quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = 2u(t).$$

Si determini l'evoluzione di tale sistema dato un ingresso $u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$, date le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$.

Esercizio 3. (14 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove

$$\text{(Testo A)}\qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{(Testo B)}\qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) **(3 punti)** Si calcolino gli autovalori della matrice A e i corrispondenti modi. Si discuta se la matrice sia diagonalizzabile.

(b) **(4 punti)** Se esiste, si determini una rappresentazione diagonale equivalente a quella data.

(c) **(3 punti)** Si calcoli la matrice di transizione dello stato e^{At}.

(d) **(4 punti)** Si determini la risposta libera dello *stato* e dell'*uscita* di tale sistema a partire dallo stato iniziale $x(0) = [\,1\;2\,]^T$.

Nota bene: qualora non si riesca a calcolare la matrice di transizione dello stato al punto (c) è possibile rispondere al punto (d) supponendo che valga

$$\text{(Testo A)}\quad e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix},$$

$$\text{(Testo B)}\quad e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}.$$