Elementi di Analisi dei Sistemi — Esercitazione 2

25 marzo 2022

Esercizio 1. Il modello della sospensione ad un grado di libertà mostrato in Figura 1 consiste in una molla con coefficiente elastico K [N/m] e in uno smorzatore con coefficiente di smorzamento b [N s/m]. Si considera come ingresso $u(t)$ la posizione della ruota sul fondo stradale e come uscita $y(t)$ la posizione della massa sospesa.

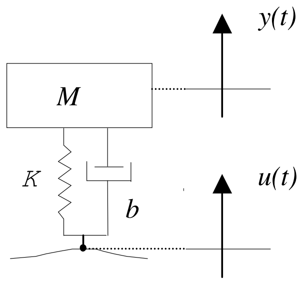

Figura 1: Modello ad un grado di libertà del quarto di automobile.

Il modello ingresso uscita di tale sistema vale:

$$M\frac{d^2}{dt^2}y(t) + b\frac{d}{dt}y(t) + Ky(t) = b\frac{d}{dt}u(t) + Ku(t).$$

1. Si determini il polinomio caratteristico e le sue radici in funzione di M, b e K.

2. Assunto $M = 300$ kg e $K = 12000$ N/m si supponga di dover progettare una sospensione potendo scegliere fra due smorzatori con $b_A = 900$ N s/m e $b_B = 3000$ N s/m.

   Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico che corrispondono ai due casi sul piano di Gauss e se ne valutino i parametri significativi (costante di tempo, pulsazione naturale, coefficiente di smorzamento). Come sono legati i valori di b a tali parametri?

3. Si tracci l'andamento qualitativo dei modi del sistema nei due casi. A quale sospensione compete il modo più veloce e quello più lento? A quale sospensione compete il modo più smorzato?

4. Quale di queste sospensioni scegliereste per una macchina di Formula 1 (dove l'obiettivo prioritario è quello di mantenere un assetto di guida costante) e quale scegliereste per una Land Rover (dove l'obiettivo prioritario è quello di garantire un comfort accettabile ai passeggeri anche su terreno accidentato)?

5. Scelta la sospensione con il valore b_A, si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=0} = 3, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 1.$$

Esercizio 2. È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

dove

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la dimensione dell'ingresso $\boldsymbol{u}(t)$, dell'uscita $\boldsymbol{y}(t)$ e dello stato $\boldsymbol{x}(t)$.

(b) Sarebbe ammissibile una rappresentazione in cui le matrici $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ siano le stesse della rappresentazione data ma valga $\boldsymbol{D} = [1\ \ 2]^T$? Giustificare la risposta.

(c) Si determini il polinomio caratteristico $P(s)$ della matrice $\boldsymbol{A}$, i suoi autovalori e autovettori della matrice $\boldsymbol{A}$.

(d) Si discuta se esiste una trasformazione di similitudine $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}(t)$ che permetta di passare ad una rappresentazione in cui la matrice di stato $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ è in forma diagonale. Tale trasformazione è unica?

(e) Determinata una trasformazione diagonalizzante, si calcoli la corrispondente rappresentazione.

(f) Si determini la matrice di transizione dello stato $e^{\boldsymbol{A}'t}$ della rappresentazione diagonale. Quali sono i suoi modi?

(g) Si determini la matrice di transizione dello stato $e^{\boldsymbol{A}t}$ della rappresentazione originale. Quali sono i suoi modi?

(h) Si determini l'evoluzione libera dello stato $\boldsymbol{x}_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$ della rappresentazione originale a partire dallo stato iniziale $\boldsymbol{x}(0) = [2\ \ 1]^T$.

(i) Si determini lo stato iniziale $\boldsymbol{z}(0)$ della rappresentazione diagonale che corrisponde allo stato iniziale dato $\boldsymbol{x}(0)$ della rappresentazione originale. Si calcoli l'evoluzione libera dello stato $\boldsymbol{z}_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$ della rappresentazione diagonale a partire da $\boldsymbol{z}(0)$.

(j) Si verifichi che mentre l'evoluzione libera dello stato delle due rappresentazioni è diversa, l'evoluzione libera dell'uscita è la stessa. Si giustifichi tale risultato.

Esercizio 3. Tracciate usando MATLAB:

(a) l'evoluzione libera dell'uscita determinata nel primo esercizio;

(b) l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita determinata nel secondo esercizio per la rappresentazione originale;

(c) l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita determinata nel secondo esercizio per la rappresentazione diagonale.