Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 16 aprile 2021

Alessandro Giua — giua@unica.it

Parte I

Negli esercizi che seguono i numeri interi $\alpha, \beta \in \{1, ..., 5\}$ si ricavano in funzione dell'ultima cifra X del tuo numero di matricola $70/75/$_ _ _ _X come segue:

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{\alpha}$	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{\beta}$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri un sistema descritto dal modello ingresso-uscita

$$\ddot{y}(t) + \alpha\dot{y}(t) = 2u(t)$$

(a) (2 punti) Si determinino i modi del sistema, li si classifichi e si tracci il loro andamento qualitativo. Quale di questi modi si estingue più velocemente?

(b) (4 punti) Si determini, mediante la tecnica di analisi nel dominio del tempo, l'evoluzione libera $y_\ell(t)$ a partire dalle condizioni iniziali: $y_\ell(0) = 1; \quad \dot{y}_\ell(0) = \beta.$

(c) (4 punti) Si determini, con l'uso delle trasformate di Laplace, l'evoluzione forzata $y_f(t)$ conseguente all'applicazione di un segnale di ingresso $u(t) = \beta\, \delta_{-1}(t)$.

Esercizio 2. (5 punti) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato dal polinomio caratteristico

$$P(s) = s^2 + (2\beta)\, s + (\alpha^2 + \beta^2).$$

(a) (3 punti) Si determinino quali sono i modi che caratterizzano tale modello, calcolando i loro parametri caratteristici (a seconda dei casi, *costante di tempo*, *pulsazione naturale* e *coefficiente di smorzamento*) e tracciandone il grafico qualitativo.

(b) (2 punti) Si determini analiticamente il tempo di assestamento al 5% dei modi e si mostri come questo valore possa determinarsi per via grafica dal grafico tracciato al punto precedente.

Parte II

Negli esercizi che seguono i numeri interi $\alpha, \beta \in \{1, ..., 5\}$ si ricavano in funzione della penultima cifra Y del tuo numero di matricola $70/75/\_\_\_Y\_$ come segue:

$\boldsymbol{Y}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{\alpha}$	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{\beta}$	2	1	2	2	3	3	4	4	5	1

Esercizio 3. (15 punti)

Un sistema ha la seguente rappresentazione in termini di variabili di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove: $$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 1-\alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) (2 punti) Si determini l'ordine del sistema e il numero di ingressi e uscite. Si discuta se tale sistema sia lineare, stazionario, dinamico e causale.

(b) (2 punti) Si determini il polinomio caratteristico della matrice di stato A e i modi di tale sistema.

(c) (5 punti) Si discuta se la matrice di stato sia diagonalizzabile e, se la risposta è positiva, si determinini per similitudine una nuova rappresentazione dove la matrice di stato A' è diagonale:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A'z(t) + B'u(t) \\ y(t) = C'z(t) + D'u(t) \end{cases}$$

(d) (4 punti) Si determini la matrice di transizione dello stato e^{At} per la rappresentazione originaria e si determini l'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$ a partire dallo stato iniziale $x(0) = [\,1 \;\; \beta\,]^T$.

(e) (2 punti) Si determini la trasformata di Laplace $Y_\ell(s)$ dell'evoluzione libera dell'uscita. Posta la trasformata $Y_\ell(s)$ nella forma di una funzione razionale, si discuta se essa sia propria e se ne determinino poli e zeri. *Chi non fosse riuscito a determinare l'evoluzione libera al punto precedente, può risolvere tale esercizio calcolando la trasformata della funzione* $f(t) = 4e^{3t} + te^{3t}$.