

# Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 15 aprile 2019

Alessandro Giua — giua@unica.it

**Esercizio 1. (4 punti)** Si consideri il sistema descritto dal modello

$$(A) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) + 2u(t) + (\varrho^2 - 1) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + \eta t^3 x_2(t) + 2u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

$$(B) \quad \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \varrho e^t \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - \frac{1 - \eta^2}{u(t)} + 3 \frac{du(t)}{dt} = 0$$

dove  $\varrho$  e  $\eta$  sono parametri costanti incogniti.

- (a) Qual è l'ordine di tale sistema? Si tratta di un sistema SISO o MIMO?
- (b) Per quali valori dei parametri  $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$  tale sistema è lineare, stazionario o dinamico?

Motivare tutte le risposte.

**Esercizio 2. (5 punti)** Un modello ingresso-uscita è caratterizzato dal polinomio caratteristico

$$(A) \quad P(s) = (s - 4)(s^2 + 4s + 4), \quad (B) \quad P(s) = (s - 3)(s^2 - 2s + 5).$$

- (a) **(3 punti)** Si determinino i modi di tale sistema e i loro parametri caratteristici tracciandone l'andamento qualitativo. Si metta in evidenza, se possibile, il significato geometrico della costante di tempo.
- (b) **(2 punti)** Si calcoli il tempo di assestamento di tali modi. Quale fra essi si estingue prima?

**Esercizio 3. (4 punti)** È data la seguente funzione:

$$(A) \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ t^2 & \text{per } 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{per } 2 \leq t \end{cases} \quad (B) \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 - t^2 & \text{per } 0 \leq t < 2 \\ -3 & \text{per } 2 \leq t \end{cases}$$

- (a) Si tracci il grafico di tale funzione.
- (b) Si determini la sua trasformata di Laplace.

**Esercizio 4. (5 punti)** Si consideri il seguente modello ingresso-uscita:

$$(A) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 3u(t), \quad (B) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 6y(t) = 2\frac{du(t)}{dt} - u(t).$$

Si determini, con l'uso delle trasformate di Laplace, la risposta forzata che consegue all'applicazione di un segnale di ingresso  $u(t) = e^{2t}\delta_{-1}(t)$ .

**Esercizio 5. (12 punti)** È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove

$$(A) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 3],$$

$$(B) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \ 0].$$

- (a) **(2 punti)** Si determini il polinomio caratteristico della matrice  $A$  e i modi che caratterizzano tale sistema.
- (b) **(5 punti)** Si discuta se la matrice  $A$  soddisfi la condizione sufficiente per poter venire diagonalizzata mediante similitudine e, se la risposta è positiva, si determini la rappresentazione  $\{A', B', C', D'\}$  corrispondente.
- (c) **(5 punti)** Si determini la matrice  $e^{At}$  e l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita dato lo stato iniziale  $x(0) = [1 \ 0]^T$ .

*(Qualora non si riesca ad determinare la matrice  $e^{At}$ , è possibile conseguire punteggio parziale al punto (c) rispondendo alla stessa domanda relativamente ad nuovo sistema la cui matrice di stato è diagonale e ha gli stessi autovalori della matrice  $A$  data.)*