Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 15 aprile 2019

Esercizio 1. (4 punti) Si consideri il sistema descritto dal modello

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) + 2\,u(t) + (\varrho^2 - 1) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + \eta\, t^3\, x_2(t) + 2\,u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^3y(t)}{dt^3} + \varrho\, e^t\, \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - \frac{1-\eta^2}{u(t)} + 3\,\frac{du(t)}{dt} = 0$$

dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti.

(a) Qual è l'ordine di tale sistema? Si tratta di un sistema SISO o MIMO?

(b) Per quali valori dei parametri $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$ tale sistema è lineare, stazionario o dinamico?

Motivare tutte le risposte.

Esercizio 2. (5 punti) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato dal polinomio caratteristico

(A) $P(s) = (s-4)(s^2+4s+4)$, (B) $P(s) = (s-3)(s^2-2s+5)$.

(a) **(3 punti)** Si determinino i modi di tale sistema e i loro parametri caratteristici tracciandone l'andamento qualitativo. Si metta in evidenza, se possibile, il significato geometrico della costante di tempo.

(b) **(2 punti)** Si calcoli il tempo di assestamento di tali modi. Quale fra essi si estingue prima?

Esercizio 3. (4 punti) È data la seguente funzione:

$$\text{(A)} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ t^2 & \text{per } 0 \le t < 2 \\ 1 & \text{per } 2 \le t \end{cases} \qquad \text{(B)} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 - t^2 & \text{per } 0 \le t < 2 \\ -3 & \text{per } 2 \le t \end{cases}$$

(a) Si tracci il grafico di tale funzione.

(b) Si determini la sua trasformata di Laplace.

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri il seguente modello ingresso-uscita:

(A) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} - 2\dfrac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 3u(t),$ (B) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + \dfrac{dy(t)}{dt} - 6y(t) = 2\dfrac{du(t)}{dt} - u(t).$

Si determini, con l'uso delle trasformate di Laplace, la risposta forzata che consegue all'applicazione di un segnale di ingresso $u(t) = e^{2t}\delta_{-1}(t)$.

Esercizio 5. (12 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove

$$\text{(A)} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{(B)} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si determini il polinomio caratteristico della matrice A e i modi che caratterizzano tale sistema.

(b) **(5 punti)** Si discuta se la matrice A soddisfi la condizione sufficiente per poter venire diagonalizzata mediante similitudine e, se la risposta è positiva, si determini la rappresentazione $\{A', B', C', D'\}$ corrispondente.

(c) **(5 punti)** Si determini la matrice e^{At} e l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita dato lo stato iniziale $x(0) = [1\ 0]^T$.

(Qualora non si riesca ad determinare la matrice e^{At}, è possibile conseguire punteggio parziale al punto (c) rispondendo alla stessa domanda relativamente ad nuovo sistema la cui matrice di stato è diagonale e ha gli stessi autovalori della matrice A data.