Elementi di Analisi dei Sistemi — Esercitazione 1

11 marzo 2019

Esercizio 1. Sono dati i seguenti modelli matematici di sistemi dinamici, dove ϱ (*rho*) e η (*eta*) sono parametri reali costanti.

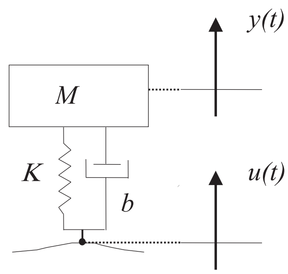
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\eta t^2) & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varrho x_1(t) & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{1}$$

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\varrho\frac{dy(t)}{dt}u(t) + 7y(t) = 3\frac{d^3u(t)}{dt^3} + \eta t^2. \tag{2}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\varrho)x_1(t) & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 20 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \eta\dot{u}(t) \end{cases} \tag{3}$$

1. Classificare tali modelli in modelli ingresso-uscita o modelli in variabili di stato, indicando il valore dei parametri significativi (ordine di derivazione dell'uscita, dell'ingresso, dimensione del vettore di stato, di ingresso e di uscita).
2. Individuare le proprietà strutturali che li caratterizzano: lineare o non lineare, stazionario o tempovariante, dinamico o istantaneo, proprio (strettamente o meno) o improprio. Discutere se esse dipendano dal valore assunto dai parametri η e ϱ. Motivare le risposte.

Esercizio 2. Per lo studio delle sospensioni dei veicoli stradali, si è soliti usare un modello detto "quarto di automobile" in cui si rappresenta una sola sospensione e la massa sospesa M che incide su di essa (un quarto della massa totale del corpo dell'automobile). Noi considereremo il modello più semplice, rappresentato in Figura 1, che prevede di trascurare la massa della ruota.



Nella figura la sospensione è rappresentata da una molla con coefficiente elastico K [N/m] e da uno smorzatore con coefficiente di smorzamento b [N s/m]. Si considera come ingresso $u(t)$ la posizione della ruota sul fondo stradale e come uscita $y(t)$ la posizione della massa sospesa. La forza peso si trascura supponendo che essa venga bilanciata dalla tensione della molla nella condizione di equilibrio (modello alle variazioni).

2. Si cerchi di determinare un modello matematico in termini di variabili di stato per questo sistema, scegliendo come variabili di stato $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = \dot{y}(t)$. Si verifichi che tale scelta non consente di ottenere un modello in forma standard.

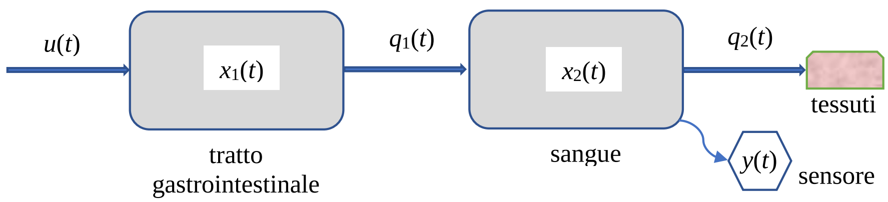
3. Si scelgano come variabili di stato $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = \dot{y}(t) - \frac{b}{M}u(t)$ e si verifichi che tale scelta consente di ottenere un modello in forma standard. Indicare il valore delle matrici A, B, C, D che costituiscono la rappresentazione.

4. Individuare le proprietà generali che caratterizzano la struttura di tale sistema.

Esercizio 3. I **modelli compartimentali** descrivono in che modo materia o energia viene trasmessa tra diverse parti (compartimenti) di un sistema. Ogni compartimento è una entità omogenea nel senso che al suo interno la distribuzione di materia o energia si può ritenere uniforme. Un esempio da noi studiato di sistema compartimentale è un sistema descritto da più serbatoi interconnessi dove ogni serbatoio è un compartimento contenente un certo volume di liquido.

La **farmacocinetica** studia quantitativamente l'assorbimento, la distribuzione, il metabolismo e l'eliminazione dei farmaci. Spesso in tale ambito si usano modelli compartimentali, dove i compartimenti rappresentano diverse parti dell'organismo in cui la concentrazione di un farmaco possa ritenersi uniforme.

Si consideri ad esempio il seguente schema semplificato che descrive il **processo di assunzione per via orale di un farmaco**.



Il farmaco raggiunge dapprima il tratto gastrointestinale e da qui passa al sangue per essere poi distribuito nei tessuti, dove esplica i suoi effetti. Nel nostro modello consideriamo solo due compartimenti e denotiamo: $x_1(t)$ la quantità di farmaco contenuta nel tratto gastrointestinale e $x_2(t)$ la quantità di farmaco contenuta nel sangue, entrambe espresse in [mg]. L'ingresso $u(t)$ descrive il flusso di arrivo del farmaco in [mg/h]. Si suppone di avere a disposizione un dispositivo di analisi (sensore) che sia in grado di misurare la concentrazione del farmaco nel sangue [mg/litri] e dunque l'uscita $y(t)$ sarà pari a tale variabile. Si tenga presente, in prima approssimazione, che il flusso di farmaco in [mg/h] che passa dal tratto gastrointestinale al sangue può essere posto pari a $q_1(t) = k_1 \cdot x_1(t)$, mentre quello che passa dal sangue ai tessuti può essere posto pari a $q_2(t) = k_2 \cdot x_2(t)$, dove k_1 e k_2 sono due costanti positive misurate in [h^{-1}].

(a) Si determini un modello matematico in variabili di stato per tale sistema indicando il valore dei parametri significativi (ordine del sistema e dimensione del vettore di stato, di ingresso e di uscita). Per determinare la trasformazione di uscita si tenga presente che un corpo umano contiene circa 5 litri di sangue.

(b) Individuare le proprietà strutturali che caratterizzano tale modello: SISO o MIMO, lineare o non lineare, stazionario o tempovariante, dinamico o istantaneo, proprio (strettamente o meno) o improprio. Si discuta se tali proprietà dipendano dal valore assunto dalle costanti k_1 e k_2. Motivare le risposte.

(c) Si ricavi un modello ingresso-uscita di tale systema, verificando se gode delle stesse proprietà del modello in variabili di stato.

Si suggerisce per risolvere questo ultimo punto di seguire questo procedimento: (a) ricavare x_2 dalla trasformazione di uscita; (b) sostituire x_2 nella seconda equazione di stato per ricavare x_1; (c) sostituire x_1 e x_2 nella prima equazione di stato.