Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 20 aprile 2018

Alessandro Giua — giua@unica.it

Esercizio 1. (9 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

1. **(3 punti)**
   (a) Si descriva in cosa consiste il *problema dell'analisi dei sistemi* per i modelli ingresso-uscita e come la sua soluzione si semplifichi per un sistema lineare e stazionario.
   (b) Si descriva in cosa consiste il *problema dell'analisi dei sistemi* per i modelli in variabili di stato e come la sua soluzione si semplifichi per un sistema lineare e stazionario.
2. **(3 punti)**
   (a) Si consideri il sistema descritto da
   $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (3-\varrho)\frac{dy(t)}{dt}y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \eta t^2\frac{du(t)}{dt} + 3u(t),$$
   dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare, stazionario, dinamico e causale per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$.
   (b) Si consideri il sistema descritto da
   $$(1-\varrho)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \eta\frac{dy(t)}{dt}y(t) = 2\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\frac{du(t)}{dt} + u(t),$$
   dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare, stazionario, dinamico e causale per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$.
3. **(3 punti)**
   (a) Un modello ingresso-uscita del terzo ordine è caratterizzato un modo t^2e^{-3t}. Si discuta a che radice del polinomio caratteristico tale modo sia associato, se ne determinino i parametri di interesse e se ne tracci l'andamento qualitativo. Siete in grado di determinare gli altri modi del sistema?
   (b) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato un modo $e^{-t}\cos(4t)$. Si discuta a che radice del polinomio caratteristico tale modo sia associato, se ne determinino i parametri di interesse e se ne tracci l'andamento qualitativo.

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\text{(a)} \qquad 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 4\frac{d^2u(t)}{dt^2} + u(t).$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 3\frac{du(t)}{dt}.$$

1. **(3 punti)** Si determinino i modi del sistema, li si classifichi e si tracci il loro andamento qualitativo. Si indichi qual è il modo più veloce ad estinguersi.
2. **(4 punti)** Si determini, mediante la tecnica nel dominio del tempo, l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$\text{(a)} \qquad y(t)\big|_{t=0} = 3 \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 1$$

$$\text{(b)} \qquad y(t)\big|_{t=0} = 3 \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 2$$

3. **(4 punti)** Si determini la risposta forzata che consegue all'applicazione di un ingresso $u(t) = 9e^t\,\delta_{-1}(t)$.

4. **(1 punto)** Si supponga che l'ingresso indicato al punto precedente venga applicato con un ritardo di due secondi, ovvero si consideri un nuovo ingresso $\bar{u}(t) = 9e^{t-2}\,\delta_{-1}(t-2)$. Si discuta come possa determinarsi, senza eseguire ulteriori calcoli, la risposta forzata che ad esso consegue.

Esercizio 3. **(9 punti)** È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$\text{(a)} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(b)} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. **(1 punto)** Si calcoli la matrice di transizione dello stato e^{At}.

2. **(2 punti)** Supposto che lo stato iniziale della rappresentazione sia $x(0) = [2 \;\; 1]^T$ si determini l'evoluzione libera dello stato $x(t)$ e dell'uscita $y(t)$.

3. **(3 punti)** Data la trasformazione di similitudine $x(t) = Pz(t)$ con $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ si determini la nuova rappresentazione che ha $z(t)$ come vettore di stato.

4. **(2 punti)** Si calcoli la matrice di transizione dello stato $e^{A't}$ per la rappresentazione che ha $z(t)$ come vettore di stato.

5. **(1 punto)** Sia A'' la matrice ottenuta da A cambiando l'elemento $(1, 1)$ in 0. Si calcoli la matrice di transizione dello stato $e^{A''t}$. Si discuta se la matrice A'' e la matrice $e^{A''t}$ siano singolari o meno.