

Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 20 aprile 2018

Esercizio 1. (9 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

1. (3 punti)

- (a) Si descriva in cosa consiste il *problema dell'analisi dei sistemi* per i modelli ingresso-uscita e come la sua soluzione si semplifichi per un sistema lineare e stazionario.
- (b) Si descriva in cosa consiste il *problema dell'analisi dei sistemi* per i modelli in variabili di stato e come la sua soluzione si semplifichi per un sistema lineare e stazionario.

2. (3 punti)

(a) Si consideri il sistema descritto da

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (3 - \varrho) \frac{dy(t)}{dt} y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \eta t^2 \frac{du(t)}{dt} + 3u(t),$$

dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare, stazionario, dinamico e causale per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$.

(b) Si consideri il sistema descritto da

$$(1 - \varrho) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \eta \frac{dy(t)}{dt} y(t) = 2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt} + u(t),$$

dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare, stazionario, dinamico e causale per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$.

3. (3 punti)

- (a) Un modello ingresso-uscita del terzo ordine è caratterizzato un modo $t^2 e^{-3t}$. Si discuta a che radice del polinomio caratteristico tale modo sia associato, se ne determinino i parametri di interesse e se ne tracci l'andamento qualitativo. Siete in grado di determinare gli altri modi del sistema?
- (b) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato un modo $e^{-t} \cos(4t)$. Si discuta a che radice del polinomio caratteristico tale modo sia associato, se ne determinino i parametri di interesse e se ne tracci l'andamento qualitativo.

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

(a) $4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 4 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + u(t).$

(b) $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 3 \frac{du(t)}{dt}.$

1. (3 punti) Si determinino i modi del sistema, li si classifichi e si tracci il loro andamento qualitativo. Si indichi qual è il modo più veloce ad estinguersi.

2. (4 punti) Si determini, mediante la tecnica nel dominio del tempo, l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

(a) $y(t)|_{t=0} = 3 \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 1$

(b) $y(t)|_{t=0} = 3 \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 2$

3. **(4 punti)** Si determini la risposta forzata che consegue all'applicazione di un ingresso $u(t) = 9e^t \delta_{-1}(t)$.
4. **(1 punto)** Si supponga che l'ingresso indicato al punto precedente venga applicato con un ritardo di due secondi, ovvero si consideri un nuovo ingresso $\bar{u}(t) = 9e^{t-2} \delta_{-1}(t-2)$. Si discuta come possa determinarsi, senza eseguire ulteriori calcoli, la risposta forzata che ad esso consegue.

Esercizio 3. (9 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, & D &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \\ \text{(b)} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, & D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (1 punto)** Si calcoli la matrice di transizione dello stato e^{At} .
- (2 punti)** Supposto che lo stato iniziale della rappresentazione sia $x(0) = [2 \ 1]^T$ si determini l'evoluzione libera dello stato $x(t)$ e dell'uscita $y(t)$.
- (3 punti)** Data la trasformazione di similitudine $x(t) = Pz(t)$ con $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ si determini la nuova rappresentazione che ha $z(t)$ come vettore di stato.
- (2 punti)** Si calcoli la matrice di transizione dello stato $e^{A't}$ per la rappresentazione che ha $z(t)$ come vettore di stato.
- (1 punto)** Sia A'' la matrice ottenuta da A cambiando l'elemento $(1, 1)$ in 0. Si calcoli la matrice di transizione dello stato $e^{A''t}$. Si discuta se la matrice A'' e la matrice $e^{A''t}$ siano singolari o meno.