Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 19 aprile 2017

Alessandro Giua — giua@unica.it

Esercizio 1. (6 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

1. *(3 punti)*

   (A) Si discuta che cosa si intende per *sistema lineare* e si ricordi come tale proprietà possa verificarsi sia in base alla struttura di un modello ingresso-uscita, sia in base alla struttura di un modello in variabili di stato.

   (B) Si discuta che cosa si intende per *sistema stazionario* e si ricordi come tale proprietà possa verificarsi sia in base alla struttura di un modello ingresso-uscita, sia in base alla struttura di un modello in variabili di stato.

2. *(3 punti)*

   (A) Cosa è la *costante di tempo* e qual è il suo il significato fisico e geometrico? Si valuti tale parametro per i modi e^{-2t} e $t^2 e^{-2t}$.

   (B) Cosa sono la *pulsazione naturale* e il *coefficiente di smorzamento* e qual è il loro significato geometrico? Si valutino tale parametri per una coppia di poli complessi e coniugati $p, p' = 3 \pm 4j$.

Esercizio 2. (3 punti) Si discuta se possa applicarsi il teorema del valore finale per determinare il $\lim_{t\to\infty} f(t)$ di una funzione $f(t)$ la cui trasformata di Laplace vale

$$\text{(A)} \quad F(s) = \frac{2s+3}{2s^2+10s+12}, \qquad\qquad \text{(B)} \quad F(s) = \frac{3s+1}{3s^2+3s}.$$

Si verifichi il risultato ottenuto applicando il teorema con il limite determinato antirasformando la funzione.

Esercizio 3. (7 punti) Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 6y(t) = 4\frac{du(t)}{dt}.$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = 2u(t).$$

1. *(4 punti)* Si determinino i modi del sistema, li si classifichi e si tracci il loro andamento qualitativo. Si indichi qual è il modo più veloce ad estinguersi.

2. *(3 punti)* Si determini, mediante la tecnica nel dominio del tempo, l'evoluzione libera del sistema per $t \geq 0$ a partire dalle condizioni iniziali

$$y_0 = y(t)|_{t=0} = 2, \qquad y'_0 = \left. \frac{d}{dt} y(t) \right|_{t=0} = 3.$$

Esercizio 4. (14 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove

$$\text{(A)} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(B)} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. *(3 punti)* Si indichi la dimensione di $u(t)$, $x(t)$ e $y(t)$. Quanto vale la matrice D che indica il legame diretto tra ingresso e uscita? Si calcolino gli autovalori e i modi corrispondenti alla matrice A.

2. *(6 punti)* Supposto che lo stato iniziale della rappresentazione sia $x(0) = [2 \;\; 1]^T$ e che il sistema sia sottoposto ad un ingresso pari a

$$\text{(A)} \quad u(t) = 2\,\delta_{-1}(t), \qquad\qquad \text{(B)} \quad u(t) = 3\,\delta_{-1}(t),$$

   si determini mediante l'uso delle trasformate di Laplace l'evoluzione dello stato $x(t)$ e dell'uscita $y(t)$. Si specifichi quale termine corrisponde all'*evoluzione libera* e quale all'*evoluzione forzata*.

3. *(3 punti)* Si discuta se esista una trasfomazione di similitudine che permetta di passare ad una nuova rappresentazione in cui la matrice di stato A' è diagonale. Se tale trasformazione esiste la si determini e si calcoli la nuova rappresentazione.

4. *(2 punti)* Si determini la matrice di transizione dello stato e^{At} per la rappresentazione originale in funzione della matrice di transizione dello stato $e^{A't}$ della rappresentazione diagonale. Si discuta se i modi che caratterizzano e^{At} coincidano con i modi determinati al punto 1.