

# Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 19 aprile 2017

**Esercizio 1. (6 punti)** Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

1. (3 punti)

- (A) Si discuta che cosa si intende per *sistema lineare* e si ricordi come tale proprietà possa verificarsi sia in base alla struttura di un modello ingresso-uscita, sia in base alla struttura di un modello in variabili di stato.
- (B) Si discuta che cosa si intende per *sistema stazionario* e si ricordi come tale proprietà possa verificarsi sia in base alla struttura di un modello ingresso-uscita, sia in base alla struttura di un modello in variabili di stato.

2. (3 punti)

- (A) Cosa è la *costante di tempo* e qual è il suo il significato fisico e geometrico? Si valuti tale parametro per i modi  $e^{-2t}$  e  $t^2 e^{-2t}$ .
- (B) Cosa sono la *pulsazione naturale* e il *coefficiente di smorzamento* e qual è il loro significato geometrico? Si valutino tale parametri per una coppia di poli complessi e coniugati  $p, p' = 3 \pm 4j$ .

**Esercizio 2. (3 punti)** Si discuta se possa applicarsi il teorema del valore finale per determinare il  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  di una funzione  $f(t)$  la cui trasformata di Laplace vale

$$(A) \quad F(s) = \frac{2s + 3}{2s^2 + 10s + 12}, \quad (B) \quad F(s) = \frac{3s + 1}{3s^2 + 3s}.$$

Si verifichi il risultato ottenuto applicando il teorema con il limite determinato antirasformando la funzione.

**Esercizio 3. (7 punti)** Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$(A) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 6y(t) = 4 \frac{du(t)}{dt}.$$
$$(B) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = 2u(t).$$

- 1. (4 punti) Si determinino i modi del sistema, li si classifichi e si tracci il loro andamento qualitativo. Si indichi qual è il modo più veloce ad estinguersi.
- 2. (3 punti) Si determini, mediante la tecnica nel dominio del tempo, l'evoluzione libera del sistema per  $t \geq 0$  a partire dalle condizioni iniziali

$$y_0 = y(t)|_{t=0} = 2, \quad y'_0 = \left. \frac{d}{dt} y(t) \right|_{t=0} = 3.$$

**Esercizio 4. (14 punti)** È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove

$$(A) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(B) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. (3 punti) Si indichi la dimensione di  $u(t)$ ,  $x(t)$  e  $y(t)$ . Quanto vale la matrice  $D$  che indica il legame diretto tra ingresso e uscita? Si calcolino gli autovalori e i modi corrispondenti alla matrice  $A$ .
2. (6 punti) Supposto che lo stato iniziale della rappresentazione sia  $x(0) = [2 \ 1]^T$  e che il sistema sia sottoposto ad un ingresso pari a

$$(A) \quad u(t) = 2 \delta_{-1}(t), \quad (B) \quad u(t) = 3 \delta_{-1}(t),$$

si determini mediante l'uso delle trasformate di Laplace l'evoluzione dello stato  $x(t)$  e dell'uscita  $y(t)$ . Si specifichi quale termine corrisponde all'*evoluzione libera* e quale all'*evoluzione forzata*.

3. (3 punti) Si discuta se esista una trasformazione di similitudine che permetta di passare ad una nuova rappresentazione in cui la matrice di stato  $A'$  è diagonale. Se tale trasformazione esiste la si determini e si calcoli la nuova rappresentazione.
4. (2 punti) Si determini la matrice di transizione dello stato  $e^{At}$  per la rappresentazione originale in funzione della matrice di transizione dello stato  $e^{A't}$  della rappresentazione diagonale. Si discuta se i modi che caratterizzano  $e^{At}$  coincidano con i modi determinati al punto 1.