Controllo Digitale — Esercitazione 4

10 aprile 2019

Esercizio 1. È data la seguente rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema tempo-continuo lineare e stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

(a) Si determini la funzione di trasferimento $W_c(s)$ di tale sistema e si discuta se esso sia stabile.

(b) Scelto un tempo di campionamento $T_c = 0.1$, si discretizzi il modello dato mediante il metodo delle differenze in avanti.

(c) Si determini la funzione di trasferimento $W_d(z)$ del sistema discretizzato e si discuta che relazione esiste con la funzione di trasferimento del sistema continuo.

(d) Si determini se il sistema discretizzato sia stabile. Esistono dei valori del tempo di campionamento che rendono il sistema discretizzato instabile?

(e) Considerando ancora un tempo di campionamento $T_c = 0.1$, si discretizzi il modello dato mediante il metodo esatto.

Esercizio 2. È data la seguente rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema tempo-discreto lineare e stazionario

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.5 & \gamma \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

dove $\gamma \in \mathbb{R}$ è un parametro incognito.

(a) Si discuta per quali valori di γ la rappresentazione è controllabile nello stato.

(b) Posto $\gamma = 1$, si determini un opportuno segnale di ingresso che consenta di raggiungere in un numero minimo di passi lo stato $x_f = [2\ 1]^T$ a partire da uno stato iniziale $x_0 = [1\ 2]^T$.

(c) Posto $\gamma = -1.5$, si determini il *sottospazio di controllabilità* ovvero i valori dello stato che è possibile raggiungere a partire da uno stato iniziale $x_0 = [0\ 0]^T$ applicando un opportuno ingresso. Quanti passi sono necessari per raggiungere un generico punto di tale spazio?

Esercizio 3. Si consideri la seguente rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema tempo-discreto lineare e stazionario

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(k) \end{cases} \qquad \text{(VS1)}$$

(a) Si determini la funzione di trasferimento di tale sistema e il corrispondente modello ingresso-uscita (IU).

(b) Si determini, mediante le formule date a lezione, un modello in variabili di stato (VS2) equivalente al modello (IU) determinato al punto precedente. Tale modello è in una particolare forma canonica?

(c) Si determini la matrice di controllabilità della rappresentazione (VS1). Se tale matrice è non singolare, si determi per similitudine una nuova rappresentazione (VS3) in forma canonica di controllo.

(d) Si determini una legge di controllo in retroazione sullo stato K che consenta di assegnare i poli del sistema a ciclo chiuso per rispettare le seguenti specifiche:

- il sistema a ciclo chiuso deve essere stabile;
- i modi del sistema a ciclo chiuso non devono presentare oscillazioni;
- i modi del sistema a ciclo chiuso devono praticamente estinguersi (assestamento all'2%) al massimo in $k = 4$ passi.

(e) Si confrontino le due rappresentazioni (VS2) e (VS3). Che vantaggio si ha nel determinare la rappresentazione (VS3) come indicato al passo (c)?