Controllo Digitale — Esercitazione 2

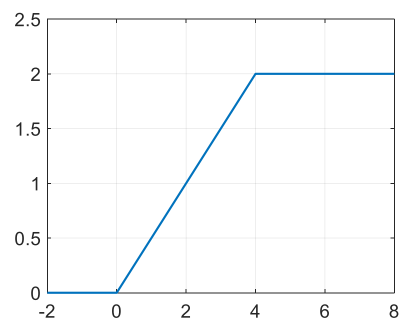
18 marzo 2019

Esercizio 1. Si determini la z-trasformata dei seguenti segnali a tempo discreto.

$$f_1(k) = \frac{1}{3^k}(1+k)\,\delta_{-1}(k); \qquad f_2(k) = \left(9k2^{k-1} - 2^k + 3\right)\,\delta_{-1}(k); \qquad f_3(k) = \begin{cases} 2 & \text{se } k \in \{0,1,2\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Per la terza funzione si verifichi anche il teorema del valore iniziale e del valore finale.

Esercizio 2. Si consideri il segnale a tempo continuo dato in figura (per $t > 4$ il segnale è costante). Si determini il segnale a tempo discreto ottenuto campionando con un periodo $T_c = 1$ e se ne calcoli la z-trasformata.



Esercizio 3. Si determini quale segnali a tempo discreto hanno le seguenti z-traformate. Si tracci tracci l'andamento del terzo segnale.

$$F_1(z) = \frac{3}{(z-1/3)^2}; \qquad F_2(z) = \frac{z^2+z+1}{z^2+9}; \qquad F_3(z) = \left(\frac{1+z^2}{z}\right)^2.$$

Esercizio 4. Si consideri un sistema descritto dalla sequente equazione alle differenze:

$$4y(k+2) - y(k) = u(k).$$

(a) Si determini la funzione di trasferimento di tale sistema.

(b) Si determini, mediante z-trasformata, la risposta forzata per un segnale di ingresso $u(k) = k\delta_{-1}(k)$.

(c) Si discuta se tale risposta possa scomporsi in un termine transitorio e un termine di regime.

(d) Si determini una rappresentazione in variabili di stato per tale sistema.

Esercizio 5. Si dimostri che data una matrice quadrata A vale

$$A^k = \mathcal{Z}^{-1}[(zI-A)^{-1}z].$$

Si verifichi questo risultato per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

studiata nell'Esercizio 5 della precedente esercitazione, la cui matrice A^k era stata calcolata mediante lo sviluppo di Sylvester

Esercizio 6. È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema tempo-discreto lineare e stazionario automono

$$\begin{cases} x(k+1) &= A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= C\,x(k) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini mediante z-trasformata l'evoluzione libera dello stato e dell'ingresso a partire dallo stato iniziale $x(0) = [1 \;\; 2]^T$.

(b) Si determini mediante z-trasformata l'evoluzione forzata dello stato e dell'ingresso a partire dallo stato iniziale per un segnale di ingresso $u(k) = (-1)^k$.

(c) Si determini un modello ingresso-uscita per tale sistema.

Funzione a tempo discreto		**z-trasformata**
Impulso unitario	$\delta(k)$	1
Impulso unitario traslato ($h \in \mathbb{Z}$)	$\delta(k-h)$	$\frac{1}{z^h}$
Gradino unitario	$\delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{z-1}$
Esponenziale	$a^k\,\delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{z-a}$
Rampa lineare	$k\,\delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
Rampa lineare esponenziale	$ka^k\,\delta_{-1}(k)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
Polinomio fattoriale	$k^{(h)}\,\delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{(z-1)^{h+1}}$
Polinomio fattoriale esponenziale	$k^{(h)}a^{k-h}\,\delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{(z-a)^{h+1}}$
Anticipo ($h \in \mathbb{N}$)	$f(k+h)$	$z^h F(z) - \sum_{i=0}^{h-1} f(i) z^{h-i}$
Ritardo ($h \in \mathbb{N}$)	$f(k-h)$	$\frac{F(z)}{z^h}$