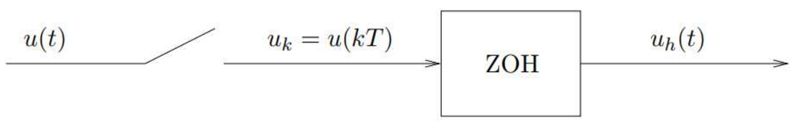
Controllo Digitale — Esercitazione 1

6 marzo 2019

Esercizio 1. Si consideri il sistema in figura, dove il campionatore e il ricostruttore (ZOH) operano con un tempo di campionamento T. Tale sistema, dal punto di vista ingresso-uscita, è a tempo continuo.



(a) Si determini l'uscita $u_h(t)$ del sistema quando $T = 0.5$ e in ingresso vi è un segnale a rampa lineare $u(t) = 2t$ per $t \geq 0$.

(b) Si dimostri che il sistema è lineare, verificando che soddisfa *il principio di sovrapposizione degli effetti*.

(c) Si dimostri che il sistema non è stazionario. Per che valori di ritardo o anticipo vale il *principio di traslazione causa-effetto nel tempo*?

Esercizio 2. Si consideri un sistema descritto dalla sequente equazione alle differenze:

$$6y(k+2) - y(k+1) - y(k) = u(k).$$

(a) Si determinino i modi del sistema e di discuta che tipo di segnali essi siano.

(b) Si determini l'evoluzione libera dell'uscita $y_\ell(k)$ a partire dalle condizioni iniziali $y(0) = -1$ e $y(1) = 2$.

(c) Si determini, se esiste, un diverso valore delle condizioni iniziali che faccia sparire uno dei due modi dall'evoluzione libera.

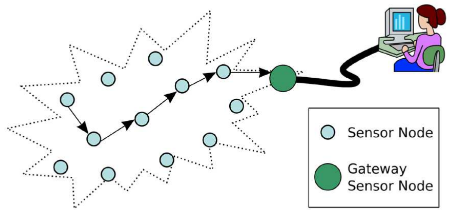
(d) Si determini l'evoluzione forzata per il segnale di ingresso $u(k) = 4\delta(k)$ (si osservi che la risposta ad un ingresso impulsivo è sostanzialmente una evoluzione libera a partire da determinate condizioni iniziali imposte dall'ingresso).

Esercizio 3. Si consideri un sistema descritto dalla sequente equazione alle differenze:

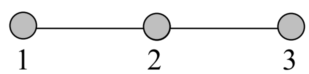
$$y(k+3) + 3y(k+2) + 2y(k+1) = u(k).$$

Date le condizioni iniziali $y(0) = 3$, $y(1) = -2$ e $y(1) = 1$ si determini l'evoluzione libera dell'uscita.

Esercizio 4. Consideriamo una rete di rete di sensori wireless distribuiti spazialmente. Ogni sensore può effetturare la misura di una variabile ambientale (p.e., la temperatura), trasmettere tale valore ad altri sensori o gateway esterni con cui è connesso e eseguire semplici elaborazioni di dati.



Nella rete costituita da tre sensori nella figura in basso, il sensore 2 comunica con i sensori 1 e 3, ma questi ultimi non comunicano fra loro: le comunicazioni sono bidirezionali. Sia $x_i(k)$ il valore della variabile stimato dal sensore $i = 1, 2, 3$ al tempo k. All'istante di tempo iniziale i sensori effettuano una misura e tale valore determina $x_i(0)$. In seguito, senza più effettuare misure, i sensori si scambiano ripetutamente informazioni per stimare un valore più attendibile della variabile che non dipenda esclusivamente dalla loro misura iniziale. In particolare ad ogni istante di tempo $k = 1, 2, \ldots$ ogni sensore aggiorna il suo valore facendo la media tra i valori precedenti comunicati dai suoi vicini e il suo valore precedente.



Si determini un modello matematico in variabili di stato di tale rete.

(Domanda opzionale) Provate a calcolare la matrice di transizione dello stato A^k mediante lo sviluppo di Sylvester o anche usando MATLAB con le seguenti istruzioni

```
A = [ ... ]
syms k
assume(k,'integer')
Atok = simplify(A^k)
```

Si verifichi che per un qualunque stato iniziale $x(0)$ per $k \to \infty$ tutti gli stati raggiungono lo stesso valore (valore di consenso) che però non è la media dei valori iniziali. Il valore di uno dei sensori contribuisce più degli altri al valore finale: qual è questo sensore?

Esercizio 5. È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema tempo-discreto lineare e stazionario automono

$$\begin{cases} x(k+1) &= A\,x(k) \\ y(k) &= C\,x(k) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad C = [\ 1 \quad 0\ ].$$

(a) Si determini la dimensione dell'ingresso $u(k)$, dell'uscita $y(k)$ e dello stato $x(k)$.

(b) Si determini il polinomio caratteristico $P_A(s)$ della matrice A.

(c) Si calcolino gli autovalori e i modi della matrice A.

(d) Si calcoli la matrice di transizione dello stato a tempo discreto A^k mediante sviluppo di Sylvester.

(e) Si determini l'evoluzione dello stato e dell'ingresso a partire dallo stato iniziale $x(0) = [2 \quad -11]^T$. A che valori tendono tali evoluzioni per $k \to \infty$ e perché?