Automi e reti di Petri — Esercitazione 1

8 marzo 2016

Esercizio 1. Si consideri l'automa finito deterministico G sull'alfabeto $E = \{0, 1\}$ con stato iniziale x_0, insieme di stati finali $X_m = \{x_2, x_3\}$ e la cui funzione di transizione vale

δ	0	1
x_0	x_3	x_1
x_1	x_1	x_4
x_2	x_1	$-$
x_3	$-$	$-$
x_4	$-$	x_4

(a) Si dia una rappresentazione grafica di G.

(b) Si determini se i singoli stati di G sono: raggiungibili, co-raggiungibili, bloccanti, morti.

(c) Si determini se G è: raggiungibile, co-raggiungibile, bloccante, rifinito, reversibile.

(d) In base alle proprietà determinate al punto precedente, si discuta se la relazione $\overline{L_m(G)} = L(G)$ sia vera. In caso contrario si determini una parola che appartiene ad uno dei due linguaggi ma non all'altro.

(e) Si determini l'automa G' ottenuto rifinendo G. Tale automa è reversibile?

Esercizio 2. Costruire, se esistono, gli automi finiti deterministici sull'alfabeto $E = \{a, b\}$ che accettano i linguaggi dati.

(a) Insieme delle parole che contengono la sottostringa aba.

(b) Insieme delle parole che non contengono la sottostringa aba.

(c) Insieme delle parole in cui il numero di a è il doppio del numero di b.

(d) Insieme delle parole che hanno al massimo tre a consecutive.

Si desidera che tutti questi automi siano rifiniti. Se un automa non esiste, si spieghi perché.

Esercizio 3. Un classico rompicapo, detto *problema dei travasi*, prevede di avere a disposizione vasi di capacità prefissata e di voler raggiungere una data configurazione finale di liquido nei vasi mediante travasi successivi. Tale problema può essere risolto mediante considerazioni matematiche. Qui si vuole mostrare come sia anche possible risolvere tale problema per forza bruta, modellandolo come un sistema ed eventi discreti ed esplorando tutte le possibili mosse.
Si supponga di avere a disposizione due vasi, il primo di capacità 2 litri e il secondo di capacità 3 litri. Inizialmente i vasi sono vuoti. Ad ogni passo è possibile eseguire una delle seguenti mosse che vengono indicate da un evento particolare.

- Evento r o s: riempi o svuota il primo vaso.
- Evento r' o s': riempi o svuota il secondo vaso.
- Evento t_{12}: travasa liquido dal primo al secondo vaso finché o il primo è vuoto o il secondo è pieno.
- Evento t_{21}: travasa liquido dal secondo al primo vaso finché o il secondo è vuoto o il primo è pieno.

Si dimostra facilmente che sotto queste ipotesi il contenuto dei vasi dopo ogni travaso sarà sempre un numero intero e dunque lo stato complessivo del sistema può essere descritto da una coppia $(i, j) \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2, 3\}$.

(a) Si descriva tale gioco come un sistema ad eventi discreti modellato da un automa finito deterministico (senza stati finali) dandone sia la rappresentazione algebrica che grafica.

(b) Si discuta, dall'analisi dell'automa, se sia possibile raggiungere i seguenti stati:

$$a) \quad (0, 2); \qquad b) \quad (1, 1); \qquad c) \quad (1, 0).$$

Per ogni stato raggiungibile, indicare la produzione minima che lo raggiunge.

(c) (bonus 1 punto) Si presenti una soluzione analitica generale al problema (si suggerisce di cercarla in rete) e si discuta se i risultati ottenuti ottenuti al punto precedente sono consistenti con tale analisi.