Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 16 Novembre 2011

Esercizio 1. (8 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

(a) *(2 punti)* Si tracci il grafico della seguente funzione:

$$\text{(Testo A)} \qquad f(t) = \delta_{-1}(t) - (t-2)\delta_{-1}(t-2) + (t-3)\delta_{-1}(t-5).$$

$$\text{(Testo B)} \qquad f(t) = t\delta_{-1}(t) - 2\delta_{-1}(t-2) - (t-3)\delta_{-1}(t-4).$$

(b) *(3 punti)* Si consideri il sistema descritto dal legame ingresso-uscita

$$\text{(Testo A)} \qquad \dot{y}(t) + y(t) + \alpha = u(t)$$

$$\text{(Testo B)} \qquad \dot{y}(t) + \alpha t^2 y(t) = 2u(t)$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro incognito costante. Si discuta come variano le proprietà di linearità e stazionarietà in funzione dei valori assunti dal parametro α, giustificando la risposta.

(c) *(3 punti)* (Testo A) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato da un polinomio caratteristico con 3 radici distinte, tutte associate a modi stabili e con tempo di assestamento minore di 3 s. Si discuta in che regione del piano complesso cadono tali radici.

(Testo B) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato da un polinomio caratteristico con 2 coppie di radici complesse e coniugate, entrambe associate a modi stabili e con coefficiente di smorzamento maggiore di 0.5. Si discuta in che regione del piano complesso cadono tali radici.

Esercizio 2. (6 punti) Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\text{(Testo A)} \qquad 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t).$$

$$\text{(Testo B)} \qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 2u(t).$$

(a) *(4 punti)* Posto $t_0 = 0$ si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=t_0} = 1, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = 1,$$

(b) *(2 punti)* Si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle stesse condizioni iniziali del punto precedente assumendo però $t_0 = 3$.

Esercizio 3. (16 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$\text{(Testo A)} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(Testo B)} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

(a) *(3 punti)* Si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice A.

(b) *(3 punti)* Si determinino i modi della matrice A, tracciandone l'andamento qualitativo e determinandone se possibile il tempo di assestamento.

(c) *(3 punti)* Si calcoli mediante lo sviluppo di Sylvester la matrice di transizione dello stato.

(d) *(3 punti)* Si discuta se esiste una trasformazione di similitudine $x(t) = Pz(t)$ che porta ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale. Si determini la rappresentazione diagonale.

(e) *(4 punti)* Supposto che lo stato iniziale della rappresentazione diagonale sia $z(0) = [1 \quad 1]^T$ e che il sistema sia sottoposto ad un ingresso pari a $u(t) = 2\delta_{-1}(t)$, si determini l'evoluzione dello stato $z(t)$ e dell'uscita $y(t)$.

Si specifichi quale termine della evoluzione dello stato corrisponde all'evoluzione libera e quale all'evoluzione forzata.