Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 27 Novembre 2010

Esercizio 1. (4 punti) Si consideri il sistema descritto dal modello

$$\text{(Testo A)} \qquad \eta\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1-\varrho}{t}y(t) = u(t) + \varrho y(t)u(t),$$

$$\text{(Testo B)} \qquad \varrho\frac{dy(t)}{dt} + y(t) + 1 = \varrho\frac{du(t)}{dt} + t\eta u(t),$$

$$\text{(Testo C)} \qquad \eta\frac{dy(t)}{dt}u(t) + y(t) = \varrho\sqrt{t}u(t)$$

$$\text{(Testo D)} \qquad (1-\eta)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \varrho\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) + \varrho t,$$

dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare, stazionario e istantaneo per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$. Motivare la risposta.

Esercizio 2. (5 punti) Si considerino due coppie di radici complesse e coniugate

$$\text{(Testo A)} \qquad p_1, p_1' = -1 \pm j2, \qquad p_2, p_2' = -1 \pm j4$$

$$\text{(Testo B)} \qquad p_1, p_1' = -1 \pm j2, \qquad p_2, p_2' = -2 \pm j4$$

$$\text{(Testo C)} \qquad p_1, p_1' = -1 \pm j3, \qquad p_2, p_2' = -1 \pm j6$$

$$\text{(Testo D)} \qquad p_1, p_1' = -1 \pm j3, \qquad p_2, p_2' = -2 \pm j6$$

(i) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso.

(ii) Si determinino i modi che ad esse corrispondono, classificandoli e calcolandone i parametri caratteristici (costante di tempo, coefficiente di smorzamento, pulsazione naturale).

(iii) Si discuta quale dei due modi sia più smorzato e quale dei due abbia il minore tempo di assestamento.

(iv) Si tracci l'andamento qualitativo dei due modi in funzione del tempo.

Esercizio 3. (4 punti) Si determini la risposta impulsiva del sistema descritto dal seguente modello IU:

$$\text{(Testo A)} \qquad \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

$$\text{(Testo B)} \qquad \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2\frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

$$\text{(Testo C)} \qquad \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t)$$

$$\text{(Testo D)} \qquad 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

Esercizio 4. (17 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$\text{(Testo A)} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{(Testo B)} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1.5 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{(Testo C)} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{(Testo D)} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) **(1 punti)** Si indichi la dimensione dei vettori di ingresso, stato e uscita.

(b) **(3 punti)** Si calcoli mediante lo sviluppo di Sylvester la matrice di transizione dello stato e^{At}.

(c) **(3 punti)** Si calcolino i modi della matrice A e si rappresenti la loro evoluzione nel tempo . Quanto vale il polinomio caratteristico $P(s)$ e il polinomio minimo $P_{\min}(s)$ della matrice A?

(d) **(2 punti)** Si discuta se la matrice e^{At} sia singolare e se possibile si determini la sua inversa.

(e) **(3 punti)** Supposto che lo stato iniziale della rappresentazione sia $x(0) = [2 \quad 1]^T$ si determini l'evoluzione libera dello stato $x(t)$ e dell'uscita $y(t)$.

(f) **(2 punti)** Si discuta se esiste, un valore dello stato iniziale $x(0)$ per cui l'evoluzione libera dell'uscita $y(t)$ valga

$$\text{(Testo A)} \quad y_\ell(t) = 1 + e^{-t} \qquad \text{(Testo B)} \quad y_\ell(t) = [\, e^{-t} \quad e^{-2t} \,]^T$$
$$\text{(Testo C)} \quad y_\ell(t) = e^{t} + 2 \qquad \text{(Testo D)} \quad y_\ell(t) = [\, e^{2t} \quad e^{t} \,]^T$$

(g) **(3 punti)** Data la trasformazione di similitudine $x(t) = Pz(t)$ con

$$\text{(Testo A)} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(Testo B)} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\text{(Testo C)} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(Testo D)} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si determini la nuova rappresentazione che ha $z(t)$ come vettore di stato.