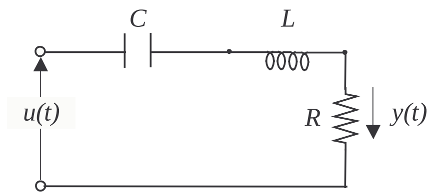
Analisi dei Sistemi — Esercitazione 2

5 Novembre 2010

Esercizio 1. Il circuito RLC mostrato in figura è composto da un condensatore di capacità C [F], un induttore di induttanza L [H] e un resistore di resistenza R [Ω] collegati in serie. Si considera come ingresso $u(t)$ la tensione imposta ai due capi del circuito da un generatore di tensione e come uscita la corrente $y(t)$ che attraversa il circuito.



Il modello ingresso-uscita di tale sistema vale:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{L}\frac{d}{dt}u(t).$$

1. Si determini il polinomio caratteristico e le sue radici.
2. Assunto $C = 250\ m$F e $L = 1$ H , si supponga di poter scegliere fra tre diverse resistenze:
$$R_1 = 2\ \Omega, \qquad R_2 = 4\ \Omega, \quad R_3 = 5\ \Omega.$$
Per ognuno dei tre diversi casi, si rappresentino le radici del polinomio caratteristico sul piano di Gauss.
3. Si classifichino i modi del sistema nei tre casi, tracciandone l'andamento qualitativo e se ne valutino i parametri significativi (a seconda dei casi, costante di tempo, pulsazione naturale, coefficiente di smorzamento). Come sono legati i valori di C, L e R a tali parametri? Si determini analiticamente laddove possibile il tempo di assestamento al 5%.
4. Scelta la resistenza R_2, si determini l'evoluzione libera $y_\ell(t)$ del sistema a partire dalle condizioni iniziali
$$y(t)|_{t=0} = 3, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 1.$$
5. Si determini che forma assume la risposta impulsiva $w(t)$ nei tre diversi casi (non occorre calcolarla).
6. Sempre assumendo di aver scelto la resistenza R_2, si calcoli la risposta impulsiva e si determini mediante l'integrale di Duhamel la risposta forzata $y_f(t)$ che consegue all'applicazione del segnale di ingresso[1] qui indicato
$$u(t) = \begin{cases} 3 & t \in [0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Soluzione: $\quad y_\ell(t) = 3e^{-2t} + 7te^{-2t}; \qquad w(t) = \left(e^{-2t} - 2te^{-2t}\right)\ \delta_1(t);$

$$y_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 3te^{-2t} & \text{per } 0 \le t < 1 \\ 3te^{-2t} - 3(t-1)e^{-2(t-1)} = 22.2e^{-2t} - 19.2te^{-2t} & \text{per } t \ge 1 \end{cases}$$

[1] Può essere utile ricordare la seguente formula notevole:
$$\int te^{\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha te^{\alpha t} - e^{\alpha t}\right).$$