Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 11 Novembre 2009

Esercizio 1. (12 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

(a) **(4 punti)** Si discuta che cosa si intende per matrice di transizione dello stato, ricordandone il significato fisico, le proprietà di maggiore interesse e dando dei cenni a come essa possa venir calcolata.

(b) **(4 punti)** Si consideri il sistema descritto dal modello

$$\text{(Testo A)} \qquad \eta \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \varrho t^2 u(t) + [\eta - 1] y(t) u(t),$$

$$\text{(Testo B)} \qquad \eta t \frac{dy(t)}{dt} + y(t) + [1 - \varrho] = \varrho \frac{du(t)}{dt} + u(t),$$

dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare, stazionario e istantaneo per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$. Motivare la risposta.

(c) **(4 punti)** Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso-uscita

$$\text{(Testo A)} \qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = u(t),$$

$$\text{(Testo B)} \qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 2u(t).$$

(i) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso e se ne determinino i modi che ad esse corrispondono, classificandoli e calcolandone i parametri caratteristici (costante di tempo, tempo di assestamento).

(ii) Si tracci qualitativamente l'andamento dei modi indicando nel grafico come sia possibile leggere geometricamente il valore di costante di tempo e tempo di assestamento.

(iii) Si discuta, se possibile, quale dei due modi sia il più veloce.

Esercizio 2. (3 punti) Ad un sistema caratterizzato dalla risposta impulsiva

$$\text{(Testo A)} \quad w(t) = \delta_{-1}(t), \qquad\qquad \text{(Testo B)} \quad w(t) = t\delta_{-1}(t),$$

viene applicato in ingresso un segnale

$$\text{(Testo A)} \quad u(t) = t\delta_{-1}(t), \qquad\qquad \text{(Testo B)} \quad u(t) = \delta_{-1}(t).$$

Quanto vale la risposta forzata $y_f(t)$?

Esercizio 3. (15 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$\text{(Testo A)} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{(Testo B)} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

(a) **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico e il polinomio minimo della matrice di stato A. In base a tale analisi è possibile determinare se la matrice è diagonalizzabile o meno?

(b) **(4 punti)** Si determini una trasformazione di similitudine che porta ad una rappresentazione

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A'z(t) + B'u(t) \\ y(t) = C'z(t) \end{cases}$$

in forma diagonale, calcolando tutte le matrici della nuova rappresentazione diagonale.

(c) **(4 punti)** Si determini la matrice di transizione dello stato per la rappresentazione diagonale e, in base a questa, si determini la matrice di transizione dello stato per la rappresentazione iniziale.

NB: chi non fosse in grado di risolvere tale punto non avendo risposto alla precedente domanda, può determinare la matrice di transizione dello stato per la rappresentazione iniziale mediante lo sviluppo di Sylvester.

(d) **(4 punti)** Si determini l'evoluzione libera dello *stato* e dell'*uscita* della rappresentazione originale a partire dall'istante $t_0 = 1$ date le condizioni iniziali $x(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.