

Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 14 Novembre 2008

Esercizio 1. (12 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

(a) **(5 punti)**

- (A) Si discuta che cosa si intende per modello ingresso-uscita, ricordando che forma esso assume nel caso generale e indicando tutte le grandezze che lo caratterizzano.
- (B) Si discuta che cosa si intende per modello in variabili di stato, ricordando che forma esso assume nel caso generale e indicando tutte le grandezze che lo caratterizzano.

In particolare, si indichi che cosa si intende per *sistema istantaneo* e si ricordi come tale proprietà possa verificarsi in base alla struttura del modello precedentemente descritto.

(b) **(3 punti)** Si consideri il sistema descritto dal modello

$$(A) \quad \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + (1 - \varrho)t^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y^\eta(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt},$$
$$(B) \quad 2 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \eta \sqrt{t} \frac{dy(t)}{dt} + \varrho(1 - y(t)) = 4 \frac{du(t)}{dt} + 4u(t),$$

dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare e stazionario per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$. Motivare la risposta.

(c) **(4 punti)**

(A) Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso-uscita

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + \eta y(t) = 3u(t),$$

dove il parametro costante $\eta \in \{17, 65\}$ può assumere due valori e si verifichi che l'evoluzione di tale sistema è caratterizzata, in entrambi i casi, da un modo pseudoperiodico.

- (i) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso e se ne determinino i parametri caratteristici (costante di tempo, pulsazione naturale, coefficiente di smorzamento) per entrambi i valori del parametro η .
- (ii) Si discuta come il valore di η influisca sullo smorzamento e sul tempo di assestamento.
- (iii) Si traccino qualitativamente i modi nei due casi.
- (B) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato dal polinomio caratteristico

$$P(s) = (s + 0.5)^3.$$

- (i) Si determinino i modi di tale sistema e i loro parametri caratteristici, calcolando per il modo esponenziale la costante di tempo e per i modi a rampa esponenziale l'eventuale punto di massimo.
- (ii) Si tracci l'andamento qualitativo di tali modi indicando quale fra essi si estingue prima?
- (iii) Si calcoli il tempo di assestamento del modo esponenziale.

Esercizio 2. (4 punti) Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$(A) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 2 \frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = -3u(t), \quad (B) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 2 \frac{du(t)}{dt}.$$

Si determini l'evoluzione libera di tale sistema a partire dall'istante $t_0 = 1$, date le condizioni iniziali $y(1) = 1$ e $\dot{y}(1) = 2$.

Esercizio 3. (14 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove

$$(A) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1],$$

$$(B) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1].$$

- (a) **(4 punti)** Si calcoli mediante lo sviluppo di Sylvester la matrice di transizione dello stato e^{At} , indicando i modi che caratterizzano tale sistema.
- (b) **(4 punti)** Si determini la risposta forzata dello stato e dell'uscita di tale sistema conseguente all'applicazione di un gradino unitario $\delta_{-1}(t)$.
- (c) **(3 punti)** Si discuta se la matrice A sia diagonalizzabile.
- (d) **(3 punti)** Data la trasformazione di similitudine $x(t) = Pz(t)$ con

$$(A) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (B) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

si determini la rappresentazione che corrisponde alla scelta del vettore di stato $z(t)$.