Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 23 Gennaio 2008

Esercizio 1 (8 punti). *È dato un sistema lineare e stazionario la cui risposta impulsiva vale*

$$w(t) = (1+t)\,\delta_{-1}(t).$$

(a) (4 punti) Si determini un modello ingresso-uscita di tale sistema, indicando il suo ordine. Si discuta se tale sistema sia: dinamico o istantaneo; strettamente proprio, proprio o improprio.

Funzione di trasferimento: $W(s)) = \mathcal{L}[w(t)] = \dfrac{s+1}{s^2}$.

Modello IU: $\ddot{y}(t) = \dot{u}(t) + u(t)$

Sistema dinamico, strettamente proprio.

(b) (4 punti) Si consideri il segnale di ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 2 & \text{per } t \in [1,3); \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Tracciatone il grafico, si calcoli, mediante l'integrale di Duhamel, quanto vale la risposta forzata del sistema dato conseguente all'applicazione del segnale $u(t)$.

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t-\tau)u(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t<1 \\ \displaystyle\int_1^t [1+(t-\tau)]\,2d\tau = t^2-1 & 1 \le t < 3 \\ \displaystyle\int_1^3 [1+(t-\tau)]\,2d\tau = 4t-4 & 3 \le t \end{cases}$$

Esercizio 2 (12 punti). *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{1}$$

(a) (5 punti) Si determini una trasformazione di similitudine $\vec{z}(t) = P^{-1}x(t)$ che porti ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale e si calcolino tutte le matrici della nuova rappresentazione.

Autovalori: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$.

Matrice modale: $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Sistema diagonale: $A' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $B' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $C' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) *(4 punti) Si desidera calcolare per la rappresentazione originaria (1) l'evoluzione libera dello stato e della uscita a partire dalla condizione iniziale $x(0) = [\ 3\ \ 5\ ]^T$. Per risolvere tale problema, si scriva la matrice di transizione dello stato della rappresentazione originaria (1) in funzione della matrice di transizione dello stato della rappresentazione diagonale.*

Matrice risolvente: $e^{At} = Ve^{A't}V^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & -e^{-2t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}$.

Evoluzione libera: $x_\ell(t) = e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} e^{-2t} + 2e^{-t} \\ e^{-2t} + 4e^{-t} \end{bmatrix}$, $\quad y_\ell(t) = 3e^{-2t} + 8e^{-t}$.

(c) *(3 punti) Si calcoli la funzione di trasferimento $W(s)$ di tale sistema e la corrispondente risposta impulsiva.*

Funzione di trasferimento: $W(s) = C(sI - A)^{-1}B = C'(sI - A')^{-1}B' = \dfrac{5s + 13}{s^2 + 3s + 2}$.

Risposta impulsiva: $w(t) = -3e^{-2t} + 8e^{-t}$.

Esercizio 3 (10 punti). *È dato un sistema la cui funzione di trasferimento vale*

$$W(s) = \frac{64s - 32}{2s^2 + 10s + 8}.$$

(a) *(6 punti) Si riporti la funzione di trasferimento di tale sistema in forma di Bode calcolandone i parametri caratteristici. Tracciare il diagramma di Bode della $W(j\omega)$.*

Guadagno di Bode: $K = -4$; $\quad K_{db} = 12$

Zero reale: $z = 0.5$; $\quad \tau' = -2$

Polo reale: $p_1 = -4$; $\quad \tau_1 = 0.25$

Polo reale: $p_2 = -1$; $\quad \tau_2 = 1$

(b) *(4 punti) Quanto vale la banda passante a $-20db$ per questo sistema? Qual è il suo significato fisico?*

$\omega_{20} = 80$ rad/s; $\quad B_{20} = \dfrac{\omega_{20}}{2\pi} = 12.7$ Hz.

Il sistema è un filtro passa-basso e B_{20} indica la frequenza del segnale sinusoidale per cui il modulo della $W(j\omega)$ si riduce di $1/10$ (ovvero -20db) rispetto al guadagno K.

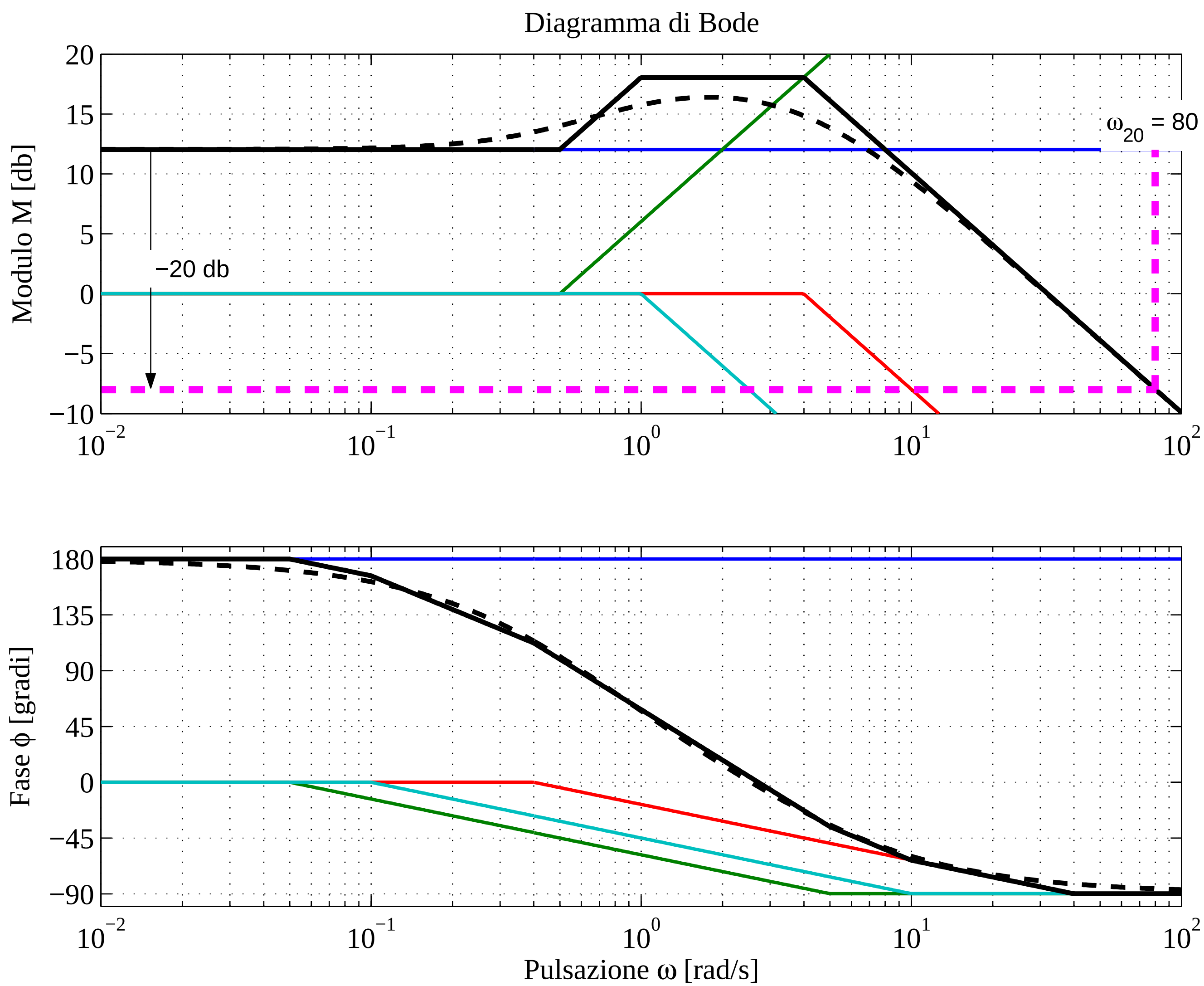
Diagramma di Bode
Modulo M [db]
20
15
10
5
0
−5
−10
−20 db
ω_{20} = 80
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Fase ϕ [gradi]
180
135
90
45
0
−45
−90
Pulsazione ω [rad/s]