Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 16 Novembre 2007

Esercizio 1. (12 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

1. **(3 punti)**

   (A) Si discuta cosa si intende per *sistema ibrido* e si dia un esempio fisico di un tale sistema.

   (B) Si discuta cosa si intende per *sistema non lineare* e si dia un esempio fisico di un tale sistema.

2. **(3 punti)**

   (A) Si consideri il sistema descritto da

   $$(2-\varrho)\frac{d^2y(t)}{dt^2}\frac{dy(t)}{dt}+y^{\eta}(t)=\frac{d^2u(t)}{dt^2}+2\frac{du(t)}{dt}+u(t),$$

   dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare o meno per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$. Motivare la risposta.

   (B) Si consideri il sistema descritto da

   $$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\varrho\frac{dy(t)}{dt}y(t)=\frac{d^2u(t)}{dt^2}+2\frac{du(t)}{dt}+(1-\eta)t^2,$$

   dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia stazionario o meno per ogni possibile valore di $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$. Motivare la risposta.

3. **(3 punti)**

   (A) Un sistema è descritto dal modello IU

   $$2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+10y(t)=u(t).$$

   Si determinino le radici del polinomio caratteristico e le si rappresenti nel piano di Gauss. Si tracci l'andamento dei modi e se ne determini il tempo di assestamento, sia analiticamente che graficamente.

   (B) Un sistema è descritto dal modello IU

   $$3\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=2u(t).$$

   Si determinino le radici del polinomio caratteristico e le si rappresenti nel piano di Gauss. Si tracci l'andamento dei modi e si determinino le corrispondenti costanti di tempo. Quale fra i modi è il più veloce? Dopo quanto tempo si può ritenere che ciascuno di essi si sia estinto?

4. **(3 punti)** Si determini quali sono le forme di Jordan a cui potrebbe essere ricondotta per similitudine una matrice che ha autovalori:

   (A) $\lambda_1 = 2$ di molteplicità $\nu_1 = 3$ e $\lambda_2 = 0$ di molteplicità $\nu_2 = 1$.

   (B) $\lambda_1 = 3$ di molteplicità $\nu_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$ di molteplicità $\nu_2 = 2$. La forma di Jordan per una matrice A data è unica?

Esercizio 2. (9 punti) Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\text{(A)} \qquad 2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}=u(t),$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{dy(t)}{dt}=2\frac{du(t)}{dt}+3u(t).$$

1. **(4 punti)** Si determini la risposta impulsiva di tale sistema tracciandone l'andamento.
2. **(5 punti)** A tale sistema viene applicato un ingresso

$$(A) \qquad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ -1 & \text{per } 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{per } t \geq 2 \end{cases}$$

$$(B) \qquad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ t & \text{per } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{per } t \geq 1 \end{cases}$$

Si tracci l'andamento di tale segnale e si determini l'evoluzione forzata che ad esso consegue.

Esercizio 3. (9 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove

$$(A) \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(B) \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. **(5 punti)** Si calcoli mediante lo sviluppo di Sylvester la matrice di transizione dello stato e^{At}.
2. **(4 punti)** Sia $x(0)$ lo stato iniziale al tempo $t = 0$. Che dimensioni ha tale vettore? Si determini se esiste un valore di $x(0)$ per cui l'evoluzione libera di tale sistema vale per $t \geq 0$:

$$(A) \qquad y_\ell(t) = 2e^t.$$

$$(B) \qquad y_\ell(t) = 3te^{2t}.$$