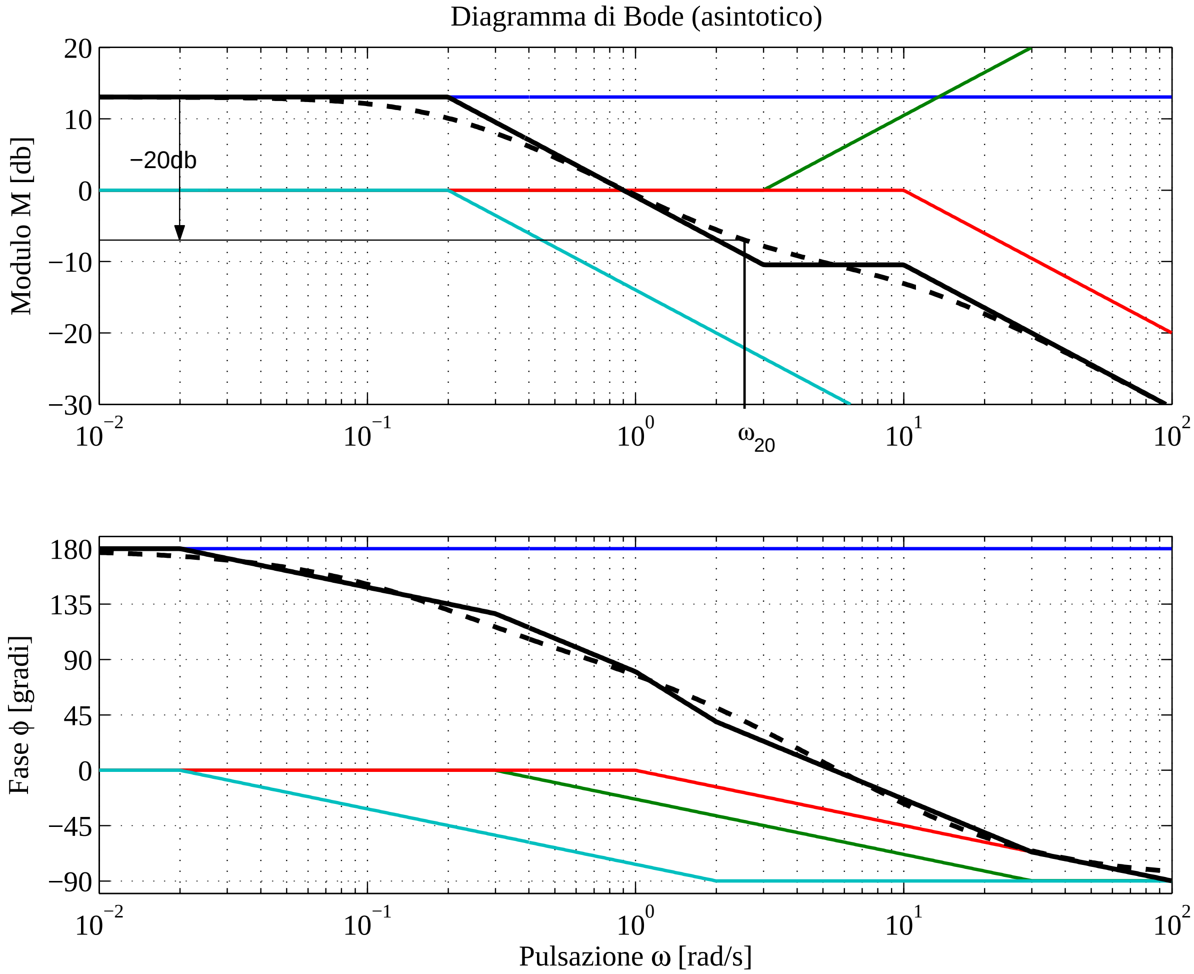
Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 9 Febbraio 2007

Esercizio 2

(a) Diagramma di Bode

Guadagno	$K = -4.5; \quad \mid K \mid_{db} = 13$
Poli nell'origine	$\nu = 0$
Zero reale	$z = 3; \quad \tau' = -0.333; \quad 1/\mid \tau' \mid = 3$
Polo reale	$p_1 = -0.2; \quad \tau_1 = 5; \quad 1/\mid \tau_1 \mid = 0.2$
Polo reale	$p_2 = -10; \quad \tau_2 = 0.1; \quad 1/\mid \tau_2 \mid = 10$



Poiché $\omega_{20} = 2.5$ rad/s, la banda passante vale $B_{20} = \omega_{20}/(2\pi) = 0.4$ Hz.

(b) Il sistema è stabile e ammette risposta a regime per un ingresso sinusoidale. Detto

$$u(t) = U\sin(\omega t + \phi_u) = 3\sin(2t - \frac{\pi}{3})$$

vale $W(j2) = M(2)e^{j\phi(2)} = 0.53e^{j0.88}$ e dunque

$$y_r(t) = UM(2)\sin(2t + \phi_u + \phi(2) = 1.58\sin(2t - 0.16).$$

I valori di $M(2)$ in db e $\phi(2)$ in gradi possono leggersi sul diagramma di Bode in corrispondenza di $\omega = 2$.

Esercizio 3

Trasformando, vale

$$W_A(s) = \frac{1}{(s-2)}; \qquad W_B(s) = \frac{2}{s}; \qquad W_C(s) = \frac{4}{s^2}.$$

La matrice di trasferimento ha dimensione $p \times r = 2 \times 1$ e vale in questo caso

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_A W_B \\ (1 - W_A W_B) W_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s(s-2)} \\ \dfrac{4(s^2-2s-2)}{s^3(s-2)} \end{bmatrix}.$$

Poiché la trasformata di $u(t)$ vale $U(s) = 3/(s-2)$, la trasformata di $y_1(t)$ vale

$$Y_1(s) = W_A(s) W_B(s) U(s) = \frac{6}{s(s-2)^2}$$

e antitrasformando

$$y_1(t) = \left(1.5 - 1.5e^{2t} + 3te^{2t}\right)\ \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 4

La matrice A ha autovalori distinti $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$, dunque la rappresentazione è certamente diagonalizzabile per similitudine.

Autovettori

$$\lambda_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad\qquad \lambda_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Matrice modale

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La nuova rappresentazione ha matrici

$$A' = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad\qquad B' = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$C' = CV = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}; \qquad\qquad D' = D = \begin{bmatrix} 0 & 7 \end{bmatrix}.$$