

# Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 18 Novembre 2006

**Esercizio 1. (8 punti)** Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

1. (2 punti)

- (a) Cosa si intende per *sistema ad avanzamento temporale*?
- (b) Cosa si intende per *sistema ad eventi discreti*?
- (c) Cosa si intende per *modello in variabili di stato*?
- (d) Cosa si intende per *modello ingresso-uscita*?

2. (2 punti)

- (a) Si consideri il sistema descritto da

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (2 - \varrho) \frac{dy(t)}{dt} y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt} + \eta t^2 u(t),$$

dove  $\varrho$  e  $\eta$  sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia lineare o meno per ogni possibile valore di  $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$ . Motivare la risposta.

- (b) Si consideri il sistema descritto da

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (2 - \varrho) \frac{dy(t)}{dt} y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \eta t^2 \frac{du(t)}{dt} + u(t),$$

dove  $\varrho$  e  $\eta$  sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia stazionario o meno per ogni possibile valore di  $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$ . Motivare la risposta.

- (c) Si consideri il sistema descritto da

$$\eta \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (2 - \varrho) \frac{dy(t)}{dt} + y^2(t) = u(t),$$

dove  $\varrho$  e  $\eta$  sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia dinamico o istantaneo per ogni possibile valore di  $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$ . Motivare la risposta.

- (d) Si consideri il sistema descritto da

$$(2 - \varrho) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} y(t) = \eta \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt} + u(t),$$

dove  $\varrho$  e  $\eta$  sono parametri costanti incogniti. Si discuta se tale sistema sia proprio (ovvero strettamente proprio) per ogni possibile valore di  $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$ . Motivare la risposta.

3. (2 punti)

- (a) Cosa è la *costante di tempo* e qual è il suo il significato fisico? Si valuti tale parametro per il modo  $e^{-3t}$ .
- (b) Cosa è la *costante di tempo* e qual è il suo il significato geometrico? Si valuti tale parametro per il modo  $e^{-4t}$ .
- (c) Cosa è la *pulsazione naturale* e qual è il suo il significato geometrico? Si valuti tale parametro per una coppia di poli complessi e coniugati  $p, p' = 2 \pm 3j$ .
- (d) Cosa è il *coefficiente di smorzamento* e qual è il suo il significato geometrico? Si valuti tale parametro per una coppia di poli complessi e coniugati  $p, p' = -1 \pm 3j$ .

4. (2 punti) Si discuta per quali valori del parametro  $a \in \mathbb{R}$  la seguente matrice è diagonalizzabile per similitudine.

(a)  $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; (b)  $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ; (c)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ; (d)  $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

**Esercizio 2. (10 punti)** Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 4\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 15\frac{du(t)}{dt} + 19u(t), \\ \text{(b)} \quad & \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 3\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 17\frac{du(t)}{dt} + 28u(t), \\ \text{(c)} \quad & \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = 2\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 15\frac{du(t)}{dt} + 31u(t), \\ \text{(d)} \quad & \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + 16y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 9\frac{du(t)}{dt} + 22u(t). \end{aligned}$$

1. **(4 punti)** Si determinino i modi del sistema, li si classifichi e si tracci il loro andamento qualitativo. Si indichi qual è il modo più veloce ad estinguersi.

2. **(3 punti)** Posto  $t_0 = 1$  si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=t_0} = \begin{cases} \text{(a)} & 1, \\ \text{(b)} & 2, \\ \text{(c)} & 3, \\ \text{(d)} & 4, \end{cases} \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 1.$$

3. **(3 punti)** Si determini la risposta impulsiva di tale sistema.

**Esercizio 3. (14 punti)** È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \text{(b)} \quad & A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \text{(c)} \quad & A = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \text{(d)} \quad & A = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1. **(2 punti)** Si indichi la dimensione di  $u(t)$ ,  $x(t)$  e  $y(t)$  e si calcolino gli autovalori e i modi della matrice  $A$ .

2. **(4 punti)** Si calcoli mediante lo sviluppo di Sylvester la matrice di transizione dello stato  $e^{At}$ .

3. **(5 punti)** Supposto che lo stato iniziale della rappresentazione sia  $x(0) = [2 \ 1]^T$  e che il sistema sia sottoposto ad un ingresso pari a

$$u(t) = \begin{cases} \text{(a)} & \delta_{-1}(t), \\ \text{(b)} & 4 \delta_{-1}(t), \\ \text{(c)} & 3 \delta_{-1}(t), \\ \text{(d)} & 8 \delta_{-1}(t), \end{cases}$$

si determini l'evoluzione dello stato  $x(t)$  e dell'uscita  $y(t)$ . Si specifichi quale termine corrisponde all'evoluzione libera e quale all'evoluzione forzata.

4. **(3 punti)** Data la trasformazione di similitudine  $x(t) = Pz(t)$  con  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  si determini la nuova rappresentazione che ha  $z(t)$  come vettore di stato.