Analisi dei Sistemi — Esercitazione 3

8 Novembre 2006

Esercizio 1. È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t) \\ y(t) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

dove

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la dimensione dell'ingresso $\boldsymbol{u}(t)$, dell'uscita $y(t)$ e dello stato $\boldsymbol{x}(t)$.

(b) Sarebbe ammissibile una rappresentazione in cui le matrici $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ siano le stesse della rappresentazione data ma valga $\boldsymbol{D} = [1 \;\; 2]^T$? Giustificare la risposta.

(c) Si determini il polinomio caratteristico $P(s)$ della matrice $\boldsymbol{A}$ e il suo polinomio minimo $P_{\min}(s)$.

(d) Si calcolino gli autovalori, gli autovettori e i modi della matrice $\boldsymbol{A}$.

(e) Si calcoli, mediante lo sviluppo di Sylvester, la matrice di transizione dello stato $e^{\boldsymbol{A}t}$ e si verifichi che ogni suo elemento è una combinazione lineare di modi.

(f) Si determini, se possibile, una trasformazione di similitudine $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}(t)$ che permetta di passare ad una rappresentazione in cui la matrice di stato $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ è in forma diagonale. Si discuta se tale trasformazione è unica.

(g) Determinata una trasformazione diagonalizzante, si calcoli la corrispondente rappresentazione.

(h) Si verifichi che vale: $e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{A}'t}\boldsymbol{P}^{-1}$ e $e^{\boldsymbol{A}'t} = \boldsymbol{P}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{P}$.

(i) Si determini l'evoluzione libera dello stato $\boldsymbol{z}_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$ della rappresentazione diagonale a partire dallo stato iniziale $\boldsymbol{z}(0) = [2 \;\; 1]^T$.

(j) Si determini lo stato iniziale $\boldsymbol{x}(0)$ della rappresentazione originale che corrisponde allo stato iniziale dato $\boldsymbol{z}(0)$ della rappresentazione diagonale. Si calcoli l'evoluzione libera dello stato $\boldsymbol{x}_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$ della rappresentazione originale a partire da $\boldsymbol{x}(0)$. Si verifichi che mentre l'evoluzione libera dello stato delle due rappresentazioni è diversa, l'evoluzione libera dell'uscita è la stessa. Si giustifichi tale risultato.

(k) Si determini l'evoluzione forzata dello stato $\boldsymbol{z}_f(t)$ della rappresentazione diagonale conseguente all'applicazione dell'ingresso

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} t\delta_{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(l) Si determini, nelle stesse condizioni del punto precedente, l'evoluzione forzata dell'uscita $y_f(t)$. Si dimostri che tale valore non dipende dalla rappresentazione considerata (è dunque sufficiente calcolare tale segnale solo per la rappresentazione diagonale per semplicità).

Esercizio 2. L'evoluzione della relazione tra Romeo e Giulietta studiata nella Esercitazione 1 (trascurando l'ingresso) è descritta dal seguente modello:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

dove $x_1(t)$ rappresenta l'amore di Romeo per Giulietta e $x_2(t)$ rappresenta l'amore di Giulietta per Romeo.

(a) Si determini come evolve tale relazione a partire dalla condizione iniziale in cui $x_1(0) = 0$ (Romeo è indifferente verso Giulietta) e $x_2(0) = 1$ (Giulietta è innamorata di Romeo). Tracciare il grafico dei segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

(b) Paride, innamorato di Giulietta, vorrebbe chiederle di sposarlo ma aspetta il momento giusto, in cui lei sia in cattivi rapporti con Romeo. Quali istanti di tempo sono i più propizi per fare la sua dichiarazione?