Analisi dei Sistemi — Esercitazione 1

10 Ottobre 2006

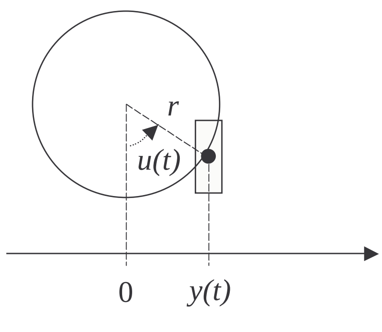
Esercizio 1. Sono dati i seguenti modelli matematici di sistemi dinamici, dove ϱ e η sono parametri reali costanti.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} (1-\eta t^2) & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & \varrho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t-T) \end{bmatrix} \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\varrho \frac{dy(t)}{dt} u(t) + 7y(t) = 3\frac{d^3u(t)}{dt^3} + \eta t^2. \tag{2}$$

1. Classificare tali modelli in modelli ingresso-uscita o modelli in variabili di stato, indicando il valore dei parametri significativi (a seconda del modello: ordine di derivazione dell'uscita, dell'ingresso, dimensione del vettore di stato, di ingresso e di uscita).
2. Individuare le proprietà strutturali che li caratterizzano: dinamico o istantaneo, lineare o non lineare, stazionario o tempovariante, a parametri concentrati o distribuiti, con o senza elementi di ritardo, proprio (strettamente o meno) o improprio. Si discuta se esse dipendano dal valore assunto dai parametri η e ϱ, motivando le risposte.

Esercizio 2. Un dispositivo laser è incernierato su un asse che può muoversi lungo una circonferenza di raggio r. Il dispositivo si mantiene sempre verticale e illumina un punto di un'asta graduata orizzontale, ovvero perpendicolare al raggio di luce emesso.



$u(t)$ $[rad]$	: angolo formato dall'asse rispetto alla verticale
$y(t)$ $[m]$	: posizione del punto illuminato sull'asta graduata
r $[m]$	: raggio della circonferenza

1. Determinare il modello matematico in termini di legame ingresso–uscita di tale sistema.
2. Individuare le proprietà generali che caratterizzano la struttura di tale sistema.
3. Supponendo che l'angolo formato dall'asse rispetto alla verticale si mantenga sempre molto piccolo, determinare un modello linearizzato di tale sistema valido per piccoli spostamenti.

Esercizio 3. Romeo e Giulietta, due giovani di Verona, si trovano coinvolti in una relazione piuttosto complicata.

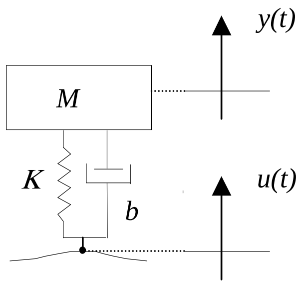
Romeo è un ragazzo dalla personalità debole, privo di qualunque iniziativa. Il suo amore per Giulietta cresce tanto più lei è innamorata di lui e, al contrario, decresce tanto più lei lo odia.

Giulietta è una ragazza volubile e insicura. Il suo amore per Romeo decresce tanto più lui è innamorato di lei e, al contrario, cresce tanto più lui la odia. Inoltre il suo amore è anche influenzato da quanto Romeo guadagna col suo lavoro part-time di istruttore di acquagym: più lo stipendio di Romeo è alto, più lei si sente sicura con lui e, conseguentemente, più cresce il suo amore.

Si vuole determinare un modello matematico per descrivere questo sistema sentimentale. Si scelga come ingresso lo stipendio di Romeo $s(t)$, come variabili di stato l'amore di Romeo per Giulietta $r(t)$ e l'amore di Giulietta per Romeo $g(t)$, e come uscita la differenza fra l'amore di Romeo e quello di Giulietta $d(t)$.

1. Si determini un modello in variabili di stato indicandone tutti i parametri di interesse.
2. Individuare le proprietà generali che caratterizzano la struttura di tale sistema.
3. Gli amici della giovane coppia vorrebbero determinare come evolverà la loro relazione tenendo conto del fatto che lo stipendio di Romeo si manterrà costante nel futuro. Si discuta se a tal fine sia più utile consultare una cartomante oppure un esperto di Analisi dei Sistemi, giustificando la risposta.

Esercizio 4. Per lo studio delle sospensioni dei veicoli stradali, si è soliti usare un modello detto *quarto di automobile* in cui si rappresenta una sola sospensione e la massa sospesa M che incide su di essa (un quarto della massa totale del corpo dell'automobile). Noi considereremo il modello più semplice, detto ad un grado di libertà che prevede di trascurare la massa della ruota (vedi figura).



Nella figura la sospensione è rappresentata da una molla con coefficiente elastico K [N/m] e da uno smorzatore con coefficiente di smorzamento b [N s/m]. Si considera come ingresso $u(t)$ la posizione della ruota sul fondo stradale e come uscita $y(t)$ la posizione della massa sospesa. La forza peso si trascura supponendo che essa venga bilanciata dalla tensione della molla nella condizione equilibrio (modello alle variazioni).

1. Si determini il modello ingresso-uscita di tale sistema.
2. Si cerchi di determinare un modello matematico in termini di variabili di stato per questo sistema, scegliendo come variabili di stato $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = \dot{y}(t)$. Si verifichi che tale scelta non consente di ottenere un modello in forma standard.
3. Si scelgano come variabili di stato $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = \dot{y}(t) - \frac{b}{M}u(t)$ e si verifichi che tale scelta consente di ottenere un modello in forma standard. Indicare il valore delle matrici A, B, C, D che costituiscono la rappresentazione.
4. Individuare le proprietà generali che caratterizzano la struttura di tale sistema.