

Analisi dei Sistemi

Seconda Prova Scritta - Soluzione Testo C - 22 Dicembre 2005

Esercizio 1. (3 punti) Sapendo che un sistema lineare e stazionario scarico risponde con un segnale pari a $y(t) = (-t^2 + e^{-5t})\delta_{-1}(t)$ ad un segnale in ingresso pari a $u(t) = (t - t^2 + e^{-t})\delta_{-1}(t)$, si determini il modello IU del sistema nel dominio del tempo.

Vale

$$Y(s) = -\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s+5}, \quad U(s) = \frac{1}{s^3} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s+1}, \quad W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^4 + s^3 - 2s^2 - 12s - 10}{s^4 + 6s^3 + 4s^2 - 7s - 10}.$$

Dunque il modello ingresso uscita vale

$$y^{(4)}(t) + 6y^{(3)}(t) + 4\ddot{y}(t) - 7\dot{y}(t) - 10y(t) = u^{(4)}(t) + u^{(3)}(t) - 2\ddot{u}(t) - 12\dot{u}(t) - 10u(t)$$

Esercizio 2. (8 punti) È data la seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{400s + 160}{-s^2 + 8s}.$$

(a) (2 punti) Si riporti tale funzione in forma di Bode, indicando tutti i parametri che la caratterizzano.

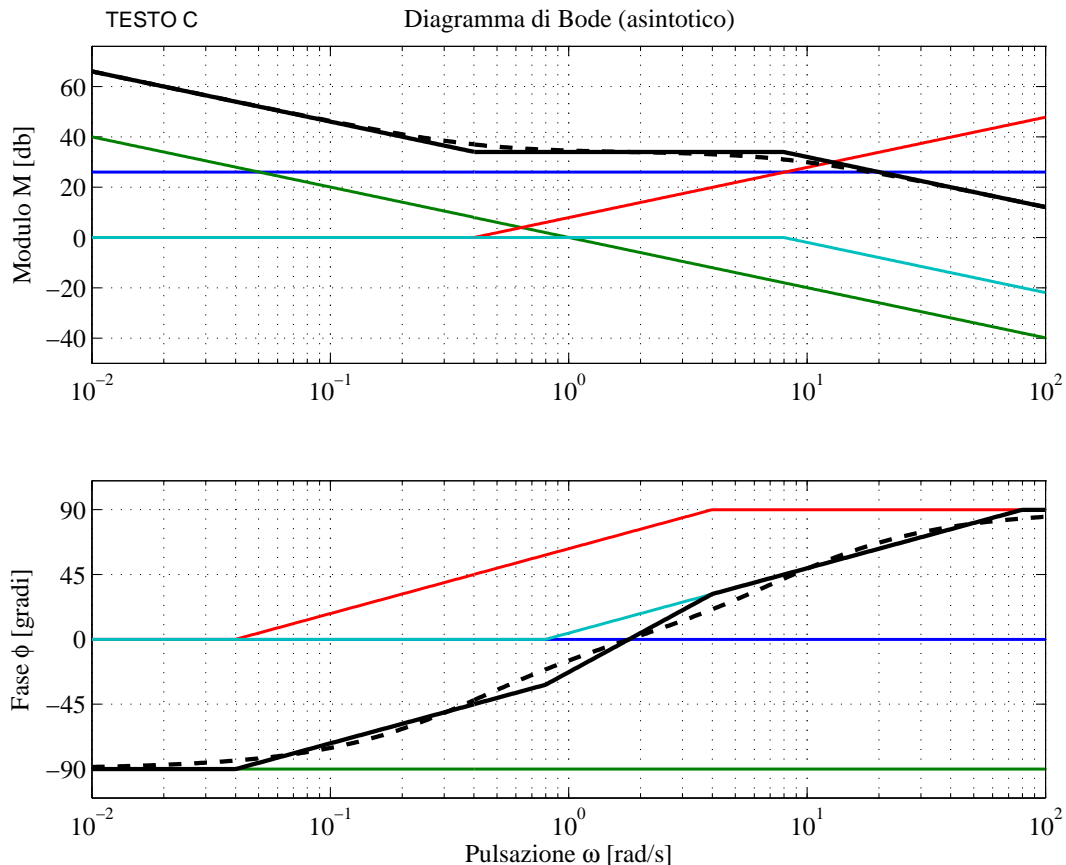
(b) (6 punti) Si tracci il diagramma di Bode di tale funzione.

Guadagno di Bode: $K = 20$, $K_{db} = 26$

Numero poli nell'origine: $\nu = 1$

Zero reale: $z = -0.4$, $\tau = 2.5$

Polo reale: $p = 8$, $\tau = -0.125$



Esercizio 3. (10 punti) La funzione di trasferimento di un sistema lineare stazionario dipende da un parametro $k \in \mathbb{R}$ e vale

$$W(s) = \frac{s + 3}{4s^4 + 2s^3 + 9s^2 + 3s + k}.$$

(a) (6 punti) Si valuti, mediante il criterio di Routh, come varia la stabilità BIBO di tale sistema al variare del parametro k . In particolare si indichi per ogni valore di k il numero di poli a parte reale positiva, nulla e negativa.

(b) (4 punti) Assunto $k = 1$, si determini se tale sistema ammetta risposta a regime quando esso è soggetto ad un ingresso sinusoidale della forma $u(t) = \cos(-t + \pi/4)$; in caso affermativo, si determini tale risposta.

(a) La tabella di Routh per il polinomio al denominatore e i poli a parte negativa, nulla e positiva valgono

4	4	9	k
3	2	3	
2	3	k	
1	$9 - 2k$		
0	k		

k	n_-	n_0	n_+
$(-\infty, 0)$	3	0	1
0	3	1	0
$(0, 4.5)$	4	0	0
4.5	2	2	0
$(4.5, +\infty)$	2	0	2

Il sistema è stabile per $k \in (0, 4.5)$.

(b) Per $k = 1$ i poli sono tutti a parte reale negativa e il sistema ammette risposta a regime. Vale $\omega = -1$, $|W(-j)| = 0.77$, $\arg(W(-j)) = 2.57$ e $y_r(t) = 0.77 \cos(-t + \pi/4 + 2.57) = 0.77 \cos(-t + 3.36)$.

Esercizio 4. (5 punti) La rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati è caratterizzata dalla matrice di stato

$$A = \begin{bmatrix} -3 & \rho \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

che dipende da un parametro incognito $\rho \in \mathbb{R}$.

Si determini al variare del parametro ρ quali siano gli stati di equilibrio del sistema e se ne valuti la stabilità.

Il polinomio caratteristico della matrice vale $s^2 + 4s + (3 - \rho)$.

Per $\rho \neq 3$ la matrice è non singolare e $[0 \ 0]^T$ è l'unico stato di equilibrio. Per $\rho = 3$ la matrice è singolare ed esistono infiniti stati di equilibrio della forma $[a \ a]^T$ per $a \in \mathbb{R}$. Il sistema è asintoticamente stabile per $\rho < 3$, stabile per $\rho = 3$ e instabile per $\rho > 3$.

Esercizio 5. (6 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) (3 punti) Si determini se tale rappresentazione sia controllabile e osservabile.

(b) (3 punti) Si determini la matrice di trasferimento e la si riporti in forma minima. Si discuta se il risultato ottenuto è in accordo con quanto trovato al punto precedente.

Il sistema è non controllabile e osservabile poiché le matrici di controllabilità e osservabilità valgono

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & -8 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}.$$

La matrice di trasferimento vale

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+4} \\ \frac{3}{s+4} \end{bmatrix}$$

e contiene solo un polo associato all'autovalore $\lambda_1 = -4$. Il polo associato all'autovalore $\lambda_2 = -1$ è stato cancellato a causa della non controllabilità.