Analisi dei Sistemi

Seconda Prova Scritta - Soluzione Testo B - 22 Dicembre 2005

Esercizio 1. (3 punti) *Sapendo che un sistema lineare e stazionario scarico risponde con un segnale pari a $y(t) = (t+e^{-2t}+e^{-t})\delta_{-1}(t)$ ad un segnale in ingresso pari a $u(t) = (t^2 + e^{-4t})\delta_{-1}(t)$, si determini il modello IU del sistema nel dominio del tempo.*

Vale

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}, \quad U(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s+4}, \quad W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^5 + 12s^4 + 19s^3 + 14s^2 + 8s}{s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 14s^2 + 28s + 16}.$$

Dunque il modello ingresso uscita vale

$$y^{(5)}(t) + 3y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 14\ddot{y}(t) + 28\dot{y}(t) + 16y(t) = 2u^{(5)}(t) + 12u^{(4)}(t) + 19u^{(3)}(t) + 14\ddot{u}(t) + 8\dot{u}(t)$$

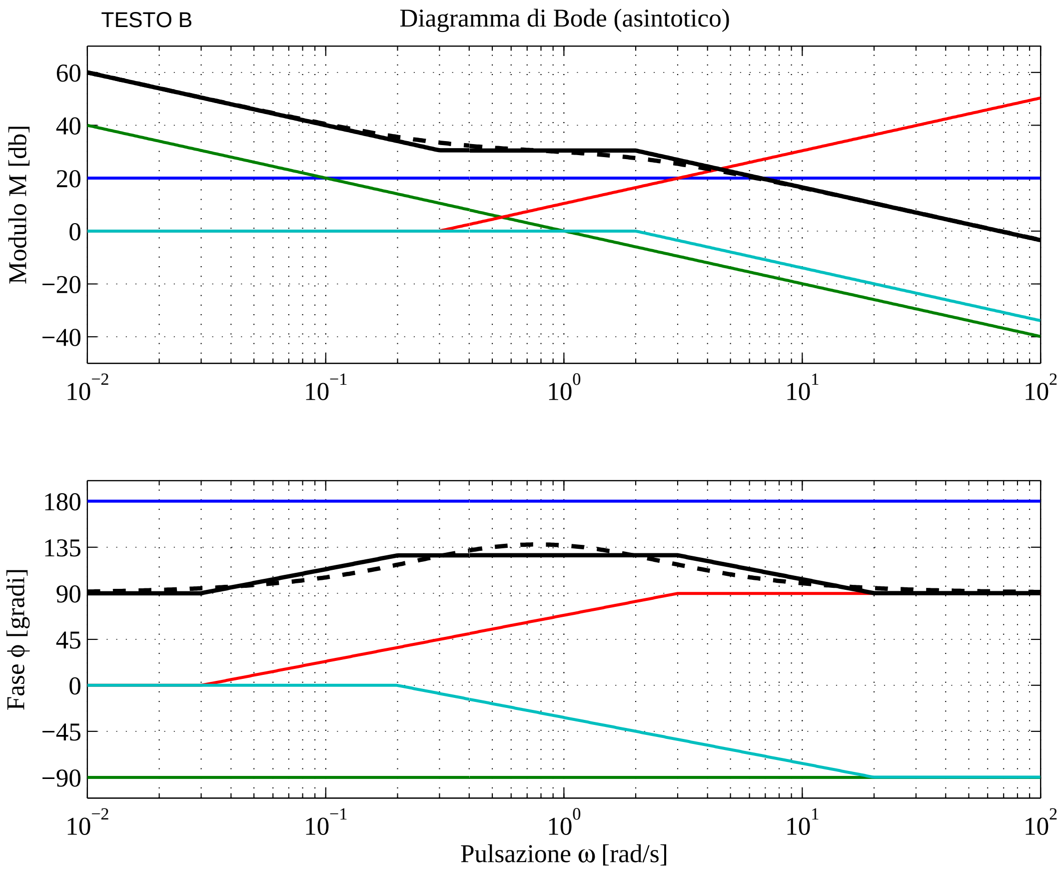
Esercizio 2. (8 punti) *È data la seguente funzione di trasferimento:*

$$W(s) = \frac{-200s - 60}{3s^2 + 6s}.$$

(a) (2 punti) Si riporti tale funzione in forma di Bode, indicando tutti i parametri che la caratterizzano.

(b) (6 punti) Si tracci il diagramma di Bode di tale funzione.

Guadagno di Bode: $K = -10$, $K_{db} = 20$
Numero poli nell'origine: $\nu = 1$
Zero reale: $z = -0.3$, $\tau = 3.\bar{3}$
Polo reale: $p = -2$, $\tau = 0.5$



Esercizio 3. (10 punti) *La funzione di trasferimento di un sistema lineare stazionario dipende da un parametro $k \in \mathbb{R}$ e vale*

$$W(s) = \frac{3s+2}{2s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 8s + k}.$$

(a) (6 punti) Si valuti, mediante il criterio di Routh, come varia la stabilità BIBO di tale sistema al variare del parametro k. In particolare si indichi per ogni valore di k il numero di poli a parte reale positiva, nulla e negativa.

(b) (4 punti) Assunto $k = 1$, si determini se tale sistema ammetta risposta a regime quando esso è soggetto ad un ingresso sinusoidale della forma $u(t) = \sin(-t - \pi/4)$; in caso affermativo, si determini tale risposta.

(a) La tabella di Routh per il polinomio al denominatore e i poli a parte negativa, nulla e positiva valgono

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 5 & k \\ 3 & 4 & 8 & \\ 2 & 1 & k & \\ 1 & 8-4k & & \\ 0 & k & & \end{array}$$

k	n_-	n_0	n_+
$(-\infty, 0)$	3	0	1
0	3	1	0
$(0, 2)$	4	0	0
2	2	2	0
$(2, +\infty)$	2	0	2

Il sistema è stabile per $k \in (0, 2)$.

(b) Per $k = 1$ i poli sono tutti a parte reale negativa e il sistema ammette risposta a regime.

Vale $\quad \omega = -1, \quad |W(-j)| = 0.8, \quad \arg(W(-j)) = 1.05 \quad$ e

$$y_r(t) = 0.8 \sin(-t - \pi/4 + 1.05) = 0.8 \sin(-t + 0.27).$$

Esercizio 4. (5 punti) *La rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati è caratterizzata dalla matrice di stato*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \varrho \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

che dipende da un parametro incognito $\varrho \in \mathbb{R}$.

Si determini al variare del parametro ϱ quali siano gli stati di equilibrio del sistema e se ne valuti la stabilità.

Il polinomio caratteristico della matrice vale $s^2 + 3s + (2 + \varrho)$.

Per $\varrho \neq -2$ la matrice è non singolare e $[0\ 0]^T$ è l'unico stato di equilibrio. Per $\varrho = -2$ la matrice è singolare ed esistono infiniti stati di equilibrio della forma $[-2a\ a]^T$ per $a \in \mathbb{R}$.

Il sistema è asintoticamente stabile per $\varrho > -2$, stabile per $\varrho = -2$ e instabile per $\varrho < -2$.

Esercizio 5. (6 punti) *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) (3 punti) Si determini se tale rappresentazione sia controllabile e osservabile.

(b) (3 punti) Si determini la matrice di trasferimento e la si riporti in forma minima. Si discuta se il risultato ottenuto è in accordo con quanto trovato al punto precedente.

Il sistema è controllabile e non osservabile poiché le matrici di controllabilità e osservabilità valgono

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di trasferimento vale

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}$$

e contiene solo un polo associato all'autovalore $\lambda_1 = -1$. Il polo associato all'autovalore $\lambda_2 = -2$ è stato cancellato a causa della non osservabilità.