Analisi dei Sistemi

Seconda Prova Scritta - Soluzione Testo A - 22 Dicembre 2005

Esercizio 1. (3 punti) *Sapendo che un sistema lineare e stazionario scarico risponde con un segnale pari a $y(t) = (t^2 + 5e^{-t})\delta_{-1}(t)$ ad un segnale in ingresso pari a $u(t) = (t + t^2 + e^{-3t})\delta_{-1}(t)$, si determini il modello IU del sistema nel dominio del tempo.*

Vale

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{5}{s+1}, \quad U(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s+3}, \quad W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5s^4 + 15s^3 + 2s^2 + 8s + 6}{s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 11s + 6}.$$

Dunque il modello ingresso uscita vale

$$y^{(4)}(t) + 2y^{(3)}(t) + 6\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 6y(t) = 5u^{(4)}(t) + 15u^{(3)}(t) + 2\ddot{u}(t) + 8\dot{u}(t) + 6u(t)$$

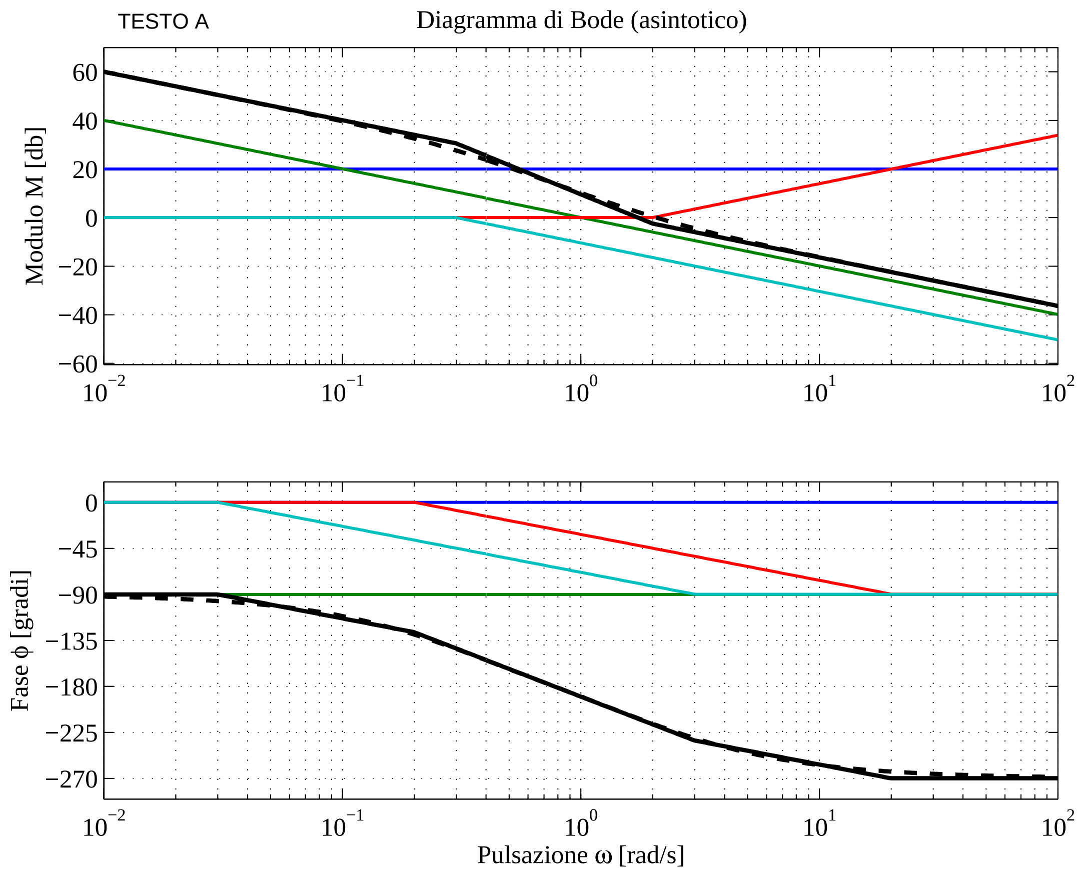
Esercizio 2. (8 punti) *È data la seguente funzione di trasferimento:*

$$W(s) = \frac{-30s + 60}{20s^2 + 6s}.$$

(a) (2 punti) Si riporti tale funzione in forma di Bode, indicando tutti i parametri che la caratterizzano.

(b) (6 punti) Si tracci il diagramma di Bode di tale funzione.

Guadagno di Bode: $K = 10$, $K_{db} = 20$
Numero poli nell'origine: $\nu = 1$
Zero reale: $z = 2$, $\tau = -0.5$
Polo reale: $p = -0.3$, $\tau = 3.\bar{3}$



Esercizio 3. (10 punti) *La funzione di trasferimento di un sistema lineare stazionario dipende da un parametro $k \in \mathbb{R}$ e vale*

$$W(s) = \frac{2s+1}{3s^4 + 3s^3 + 6s^2 + s + k}.$$

(a) (6 punti) Si valuti, mediante il criterio di Routh, come varia la stabilità BIBO di tale sistema al variare del parametro k. In particolare si indichi per ogni valore di k il numero di poli a parte reale positiva, nulla e negativa.

(b) (4 punti) Assunto $k = 1$, si determini se tale sistema ammetta risposta a regime quando esso è soggetto ad un ingresso sinusoidale della forma $u(t) = \sin(-t + \pi/4)$; in caso affermativo, si determini tale risposta.

(a) La tabella di Routh per il polinomio al denominatore e i poli a parte negativa, nulla e positiva valgono

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 3 & 6 & k \\ 3 & 3 & 1 & \\ 2 & 5 & k & \\ 1 & 5-3k & & \\ 0 & k & & \end{array}$$

k	n_-	n_0	n_+
$(-\infty, 0)$	3	0	1
0	3	1	0
$(0, 5/3)$	4	0	0
$5/3$	2	2	0
$(5/3, +\infty)$	2	0	2

Il sistema è stabile per $k \in (0, 5/3)$.

(b) Per $k = 1$ i poli sono tutti a parte reale negativa e il sistema ammette risposta a regime.

Vale $\omega = -1, \quad |W(-j)| = 0.79, \quad \arg(W(-j)) = 2.82$ e

$$y_r(t) = 0.79 \sin(-t + \pi/4 + 2.82) = 0.79 \sin(-t + 3.60).$$

Esercizio 4. (5 punti) *La rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati è caratterizzata dalla matrice di stato*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \varrho \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

che dipende da un parametro incognito $\varrho \in \mathbb{R}$.

Si determini al variare del parametro ϱ quali siano gli stati di equilibrio del sistema e se ne valuti la stabilità.

Il polinomio caratteristico della matrice vale $s^2 + 3s + (2 - \varrho)$.

Per $\varrho \neq 2$ la matrice è non singolare e $[0\ 0]^T$ è l'unico stato di equilibrio. Per $\varrho = 2$ la matrice è singolare ed esistono infiniti stati di equilibrio della forma $[a\ a]^T$ per $a \in \mathbb{R}$.

Il sistema è asintoticamente stabile per $\varrho < 2$, stabile per $\varrho = 2$ e instabile per $\varrho > 2$.

Esercizio 5. (6 punti) *È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (3 punti) Si determini se tale rappresentazione sia controllabile e osservabile.

(b) (3 punti) Si determini la matrice di trasferimento e la si riporti in forma minima. Si discuta se il risultato ottenuto è in accordo con quanto trovato al punto precedente.

Il sistema è controllabile e non osservabile poiché le matrici di controllabilità e osservabilità valgono

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & -6 \end{bmatrix}; \qquad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

La matrice di trasferimento vale

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{3}{s+2} \end{bmatrix}$$

e contiene solo un polo associato all'autovalore $\lambda_1 = -2$. Il polo associato all'autovalore $\lambda_2 = -1$ è stato cancellato a causa della non osservabilità.