

Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta (Testo C) - 11 Novembre 2005

Esercizio 1. (8 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande. Ad ogni risposta esatta verranno attribuiti 2 punti.

1. Dato un modello in termini di variabili di stato, quali sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché tale modello sia lineare e stazionario?
2. Qual'è il significato fisico della costante di tempo relativa al modo pseudoperiodico stabile $t^2 e^{\alpha t} \cos(\omega t)$ ($\alpha < 0$)?
3. Il legame ingresso-uscita relativo a due rappresentazioni simili è lo stesso o dipende dalla particolare rappresentazione? Motivare la risposta.
4. Si consideri la seguente matrice e si definiscano i modi ad essa relativi:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t).$$

1. (2 punti) Si determini il polinomio caratteristico e si calcolino le sue radici.
2. (3 punti) Si determinino i modi del sistema, li si classifichi e si tracci il loro andamento qualitativo.
3. (3 punti) Posto $t_0 = 0$ si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=t_0} = 1, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 1, \quad \left. \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0.$$

4. (2 punti) Si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle stesse condizioni iniziali del punto precedente assumendo però $t_0 = 1$.

Esercizio 3. (14 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. (3 punti) Si calcolino gli autovalori, gli autovettori e i modi della matrice A .
2. (3 punti) Si calcoli mediante lo sviluppo di Sylvester la matrice di transizione dello stato.
3. (2 punti) Si determini una trasformazione di similitudine $x(t) = Pz(t)$ che porti ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale.
4. (2 punti) Determinata una trasformazione diagonalizzante, si calcoli la corrispondente rappresentazione.
5. (4 punti) Supposto che lo stato iniziale della nuova rappresentazione sia $z(0) = [2 \ 0]^T$ e che il sistema sia sottoposto ad un ingresso pari a $u(t) = \delta_{-1}(t)$, si determini l'evoluzione dello stato $z(t)$.
Si specifichi quale termine della evoluzione dello stato corrisponde all'evoluzione libera e quale all'evoluzione forzata.