Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta (Testo B) - 11 Novembre 2005

Esercizio 1. (8 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande. Ad ogni risposta esatta verranno attribuiti 2 punti.

1. Cosa si intende per sistema lineare?
2. Quante sono le variabili di stato di un sistema istantaneo?
3. Data una rappresentazione in termini di variabili di stato, quante rappresentazioni simili è possibile definire e quale condizione deve soddisfare la matrice che definisce la trasformazione?
4. Si definisca il blocco di Jordan J di ordine 4 relativo ad un generico autovalore λ. Quanto vale la matrice e^{Jt}?

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 8\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 20\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2}.$$

1. **(2 punti)** Si determini il polinomio caratteristico e si calcolino le sue radici.
2. **(3 punti)** Si determinino i modi del sistema, li si classifichi e si tracci il loro andamento qualitativo.
3. **(3 punti)** Posto $t_0 = 0$ si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=t_0} = 1, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = 0, \qquad \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=t_0} = 1.$$

4. **(2 punti)** Si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle stesse condizioni iniziali del punto precedente assumendo però $t_0 = 2$.

Esercizio 3. (14 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. **(3 punti)** Si calcolino gli autovalori, gli autovettori e i modi della matrice A.
2. **(3 punti)** Si calcoli mediante lo sviluppo di Sylvester la matrice di transizione dello stato.
3. **(2 punti)** Si determini una trasformazione di similitudine $x(t) = Pz(t)$ che porti ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale.
4. **(2 punti)** Determinata una trasformazione diagonalizzante, si calcoli la corrispondente rappresentazione.
5. **(4 punti)** Supposto che lo stato iniziale della nuova rappresentazione sia $z(0) = [0 \quad 1]^T$ e che il sistema sia sottoposto ad un ingresso pari a $u(t) = 3\delta_{-1}(t)$, si determini l'evoluzione dello stato $z(t)$.

   Si specifichi quale termine della evoluzione dello stato corrisponde all'evoluzione libera e quale all'evoluzione forzata.