

Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta (Testo A) - 11 Novembre 2005

Esercizio 1. (8 punti) Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande. Ad ogni risposta esatta verranno attribuiti 2 punti.

1. Cosa si intende per sistema stazionario?
2. Si consideri il sistema descritto dal legame ingresso-uscita $y(t) = 3u(t-2)$. Tale sistema è istantaneo o dinamico? Motivare la risposta.
3. Dimostrare perchè l'integrale di Duhamel può essere equivalentemente scritto come

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau)w(t-\tau)d\tau \quad \text{o} \quad y(t) = \int_0^{\infty} u(t-\tau)w(\tau)d\tau.$$

4. Sia A una matrice con autovalori tutti distinti. Qual'è un approccio alternativo allo sviluppo di Sylvester per il calcolo della matrice e^{At} ?

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 13\frac{dy(t)}{dt} = 2\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 3u(t).$$

1. (2 punti) Si determini il polinomio caratteristico e si calcolino le sue radici.
2. (3 punti) Si determinino i modi del sistema, li si classifichi e si tracci il loro andamento qualitativo.
3. (3 punti) Posto $t_0 = 0$ si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=t_0} = 1, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 1, \quad \left. \frac{d^2y(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 1.$$

4. (2 punti) Si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle stesse condizioni iniziali del punto precedente assumendo però $t_0 = 3$.

Esercizio 3. (14 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. (3 punti) Si calcolino gli autovalori, gli autovettori e i modi della matrice A .
2. (3 punti) Si calcoli mediante lo sviluppo di Sylvester la matrice di transizione dello stato.
3. (2 punti) Si determini una trasformazione di similitudine $x(t) = Pz(t)$ che porti ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale.
4. (2 punti) Determinata una trasformazione diagonalizzante, si calcoli la corrispondente rappresentazione.
5. (4 punti) Supposto che lo stato iniziale della nuova rappresentazione sia $z(0) = [1 \ 0]^T$ e che il sistema sia sottoposto ad un ingresso pari a $u(t) = 2\delta_{-1}(t)$, si determini l'evoluzione dello stato $z(t)$.

Si specifichi quale termine della evoluzione dello stato corrisponde all'evoluzione libera e quale all'evoluzione forzata.