Correzione dell'Esercitazione 6

Stefano Angioni

6 dicembre 2005

Esercizio 1

In questo esercizio si studia un sistema rappresentato da un modello ingresso–uscita lineare e stazionario, mediante l'utilizzo della trasformata di Laplace, che costituisce un utile strumento matematico per semplificare problemi di analisi.

Evoluzione libera

L'equazione differenziale che descrive la dinamica del modello è

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 5u(t). \tag{1}$$

Trasformiamo quindi tale relazione differenziale secondo Laplace, facendo uso del teorema che lega le derivate temporali delle funzioni e le loro trasformate. Posto quindi $y(t)|_{t=0} = y_0$, e $\dot{y}(t)|_{t=0} = y_0'$, avremo:

$$s^2Y(s) - sy_0 - y_0' + 4(Y(s) - y_0) + 5Y(s) = sU(s) + 5U(s),$$

e quindi, riordinando:

$$Y(s)(s^2 + 4s + 5) - (sy_0 + y_0 + y_0') = U(s)(s + 5).$$

Tenendo ora conto del fatto che vale $y_0 = 1$ e $y_0' = 2$, otteniamo

$$Y(s) = \frac{s+6}{s^2+4s+5} + \frac{s+5}{s^2+4s+5}U(s). \tag{2}$$

Riconosciamo nel primo termine la $Y_l(s)$, ovvero la trasformata di Laplace dell'evoluzione libera; possiamo quindi antitrasformare la funzione razionale che la rappresenta, essa ha due poli complessi e coniugati $p_{1,2} = -2 \pm j$ e, secondo lo sviluppo di Heaviside, può essere espressa come

$$Y_l(s) = \frac{R}{s+2-j} + \frac{R'}{s+2+j},$$

dove i due residui R ed R' sono coniugati tra loro. Calcoliamo quindi:

$$R = \lim_{s \to -2+j} (s+2-j) Y_l(s) = \lim_{s \to -2+j} \frac{s+6}{s+2+j} = \frac{1-4j}{2}.$$

E, in definitiva, la trasformata della risposta libera si può scrivere come

$$Y_l(s) = \frac{1-4j}{2(s+2-j)} + \frac{1+4j}{2(s+2+j)};$$

questa funzione ha, come antitrasformata, la funzione del tempo

$$y_l(t) = M e^{-2t} \cos(t+\phi) \delta_{-1}(t), \tag{3}$$

ed i valori di M e ϕ possono essere calcolati come

$$M = 2|R| = 2\sqrt{\frac{1^2+4^2}{2^2}} = \sqrt{17}$$

$$\phi = \arg(R) = \arctan\left(\frac{-4}{1}\right) = -1.32$$

e quindi, infine, l'evoluzione libera sarà

$$y_l(t) = \sqrt{17} e^{-2t} \cos(t - 1.32) \delta_{-1}(t).$$

Funzione di trasferimento e risposta impulsiva

Se osserviamo la (2), notiamo che essa può esprimersi come

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{D(s)} + \frac{N(s)}{D(s)} U(s),$$

e il rapporto di polinomi $N(s)/D(s)$ è, per definizione, la funzione di trasferimento del sistema; pertanto possiamo scrivere che

$$W(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+5}. \tag{4}$$

Ora, per determinare la risposta impulsiva $w(t)$, procediamo all'antitrasformazione della (4). Notiamo innanzitutto che il polinomio a denominatore della funzione di trasferimento è lo stesso che abbiamo già esaminato nello studio della risposta libera, pertanto le sue radici sono note. La $W(s)$ potrà quindi essere espressa come somma di fratti semplici:

$$W(s) = \frac{R}{s+2-j} + \frac{R'}{s+2-j}.$$

Determiniamo il valore dei residui:

$$R = \lim_{s \to -2+j} (s+2-j) W(s) = \frac{1-3j}{2}.$$

Di conseguenza possiamo calcolare i due valori

$$M = 2|R| = 2\sqrt{\frac{1^2+3^2}{2^2}} = \sqrt{10}$$
$$\phi = \arg R = \arctan\left(\frac{-3}{1}\right) = -1.24,$$

pertanto la risposta impulsiva sarà:

$$w(t) = \sqrt{10}e^{-2t}\cos(t-1.24)\delta_{-1}(t)$$

Risposta indiciale

La risposta indiciale $w_{-1}(t)$ è l'evoluzione forzata di un sistema che sia sottoposto ad un ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$. Essa assumerà la forma

$$w_{-1}(t) = (K + Me^{-2t}\cos(t+\phi))\delta_{-1}(t), \tag{5}$$

ovvero un termine costante più una combinazione dei modi propri del sistema. Se infatti osserviamo la (2), è facile rendersi conto che il termine di evoluzione forzata (ossia quello che risente dell'azione dell'ingresso) è:

$$Y_f(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+5}U(s).$$

Nel nostro caso vale $U(s) = \mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s}$, e quindi possiamo scrivere che la trasformata della risposta indiciale è

$$W_{-1}(s) = \frac{1}{s}W(s) = \frac{s+5}{s(s^2+4s+5)}.$$

Procediamo quindi alla sua antitrasformazione, scrivendone lo sviluppo di Heaviside:

$$W_{-1}(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2-j} + \frac{R_2'}{s+2+j}.$$

Passiamo poi al calcolo dei residui:

$$R_1 = \lim_{s\to 0} sW_{-1}(s) = W(0) = 1$$
$$R_2 = \lim_{s\to -2+j}(s+2-j)W_{-1}(s) = \frac{j-1}{2}.$$

Abbiamo perciò l'espressione completa dello sviluppo:

$$W_1(s) = \frac{1}{s} + \frac{j-1}{2(s+2-j)} + \frac{-1-j}{2(s+2+j)}$$

che ci conduce al calcolo dei parametri

$$M = 2|R_2| = 2\sqrt{\frac{1^2+1^2}{2^2}} = \sqrt{2}$$
$$\phi = \arg(R_2) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

i quali, sostituiti nella (5), forniscono l'espressione della risposta indiciale:

$$w_{-1}(t) = \left[1 + \sqrt{2}e^{-2t}\cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)\right]\delta_{-1}(t).$$

Poiché i modi del sistema sono tutti stabili, è possibile distinguere nella $w_{-1}(t)$ un termine di regime, rappresentato dalla costante, che rappresenta la risposta del sistema per $t \to \infty$, e un termine transitorio. ovvero la combinazione dei modi, che si annulla per $t \to \infty$.

Esercizio 2

La trasformata di Laplace costituisce una notevole agevolazione nell'analisi di sistemi lineari e stazionari espressi da modelli in variabili di stato, grazie all'introduzione della *matrice risolvente* e alla relativa semplicità delle tecniche di calcolo matriciale necessarie per condurre tale analisi.

Matrice risolvente e matrice di transizione dello stato

La matrice di stato della rappresentazione vale

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix},$$

possiamo quindi immediatamente determinare la matrice

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s+5 \end{bmatrix}.$$

Per determinare la sua inversa, calcoliamone prima di tutto il determinante, che essendo $\boldsymbol{A}$ in forma *compagna*, può essere scritto immediatamente:

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s^2 + 5s + 4.$$

Calcoliamo ora l'aggiunta di $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$:

$$\mathrm{agg}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix}$$

e infine la matrice risolvente:

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\mathrm{agg}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})} = \frac{1}{s^2+5s+4}\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix}$$

Dobbiamo ora procedere all'antitrasformazione delle singole funzioni razionali che compongono la matrice risolvente, che chiameremo $F_{ij}(s)$ con ovvio significato di notazione. Otteniamo

$$F_{11}(s) = \frac{s+5}{s^2+5s+4} = \frac{1}{3}\left[\frac{4}{s+1} - \frac{1}{s+4}\right];$$
$$F_{12}(s) = \frac{1}{s^2+5s+4} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4}\right];$$
$$F_{21}(s) = \frac{-4}{s^2+5s+4} = \frac{1}{3}\left[\frac{-4}{s+1} + \frac{4}{s+4}\right];$$
$$F_{22}(s) = \frac{-4}{s^2+5s+4} = \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s+4}\right].$$

Queste funzioni razionali, antitrasformate, compongono la matrice di transizione dello stato $e^{\boldsymbol{A}t}$:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (4e^{-t}-e^{-4t}) & (e^{-t}-e^{-4t}) \\ (-4e^{-t}+4e^{-4t}) & (-e^{-t}+4e^{-4t}) \end{bmatrix}$$

Come ci si doveva aspettare, ciascun elemento della matrice di transizione dello stato è una combinazione lineare dei modi del sistema.

Funzione di trasferimento

Una volta determinata la matrice risolvente, è immediato determinare la funzione di trasferimento, mediante il prodotto matriciale

$$W(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + D:$$

Nel nostro caso otteniamo

$$W(s) = \frac{1}{s^2+5s+4}\begin{bmatrix} 13 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{13s+9}{4s^2+20s+16}$$

Modello ingresso–uscita equivalente

Una volta determinata la funzione di trasferimento, è semplice passare ad un modello IU, se ricordiamo che il polinomio a denominatore della $W(s)$ è composto dai coefficienti delle derivate dell'uscita nell'equazione differenziale che regola il modello IU, e la medesima cosa si può dire per il polinomio a numeratore nei confronti dell'ingresso. Otteniamo quindi il modello:

$$4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 20\frac{dy(t)}{dt} + 16y(t) = 13\frac{du(t)}{dt} + 9u(t).$$

Evoluzione forzata dello stato e dell'uscita

L'evoluzione forzata dello stato, nel dominio della variabile di Laplace, è data dall'espressione:

$$\boldsymbol{X}_f(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s); \tag{6}$$

e dato che la trasformata del nostro ingresso vale

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s+1},$$

la (6) diventa

$$\boldsymbol{X}_f(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s^2+5s+4}\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ \\ -4 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)^2(s+4)} \\ \\ \dfrac{s}{(s+1)^2(s+4)} \end{bmatrix}.$$

Antitrasformando questo vettore di funzioni razionali si ottiene l'evoluzione temporale dello stato forzato dall'ingresso:

$$\boldsymbol{x}_f(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \left(-\dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{1}{3}te^{-t} + \dfrac{1}{9}e^{-4t}\right) \\ \\ \left(\dfrac{4}{9}e^{-t} - \dfrac{1}{3}te^{-t} - \dfrac{4}{9}e^{-4t}\right) \end{bmatrix}\delta_{-1}(t)$$

Anche in questo caso, essendo i modi del sistema tutti stabili, è possibile distinguere il termine transitorio e quello di regime nell'evoluzione dello stato. In particolare, dato che l'ingresso tende a zero, anche lo stato, a regime, si annulla.

Per quanto riguarda l'uscita, ricordiamo che per modelli LTI in variabili di stato vale:

$$y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + Du(t),$$

e questo, nel nostro caso, equivale a dire che per ricavare l'uscita è sufficiente moltiplicare a sinistra il vettore di stato per la matrice $\boldsymbol{C}$:

$$y_f(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_f(t) = \left[-\frac{1}{12}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t} - \frac{23}{36}e^{-4t}\right]\delta_{-1}(t).$$

E vale il medesimo discorso fatto per lo stato a proposito del regime transitorio e permanente.

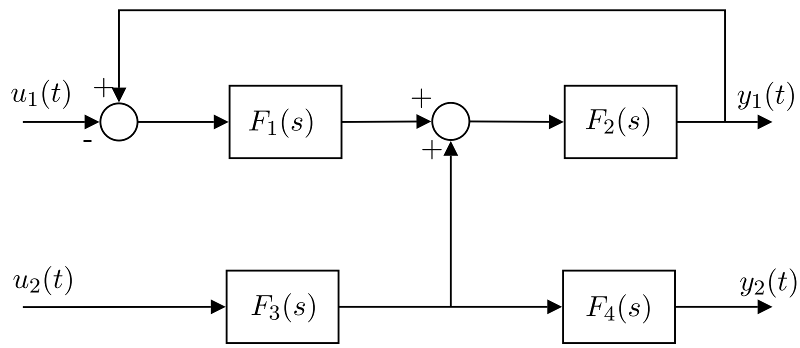

Figura 1: Schema a blocchi

Esercizio 3

Dobbiamo determinare la matrice di trasferimento del sistema *MIMO* in Figura 1. Manipoliamo la rappresentazione mediante le regole dell'algebra degli schemi a blocchi. Per semplicità abbiamo rinominato le funzioni di trasferimento dei singoli blocchi:

$$F_1(s) = \frac{3}{s+1}$$
$$F_2(s) = \frac{1}{s^2}$$
$$F_3(s) = \frac{4}{s+2}$$
$$F_4(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s}.$$

Come prima operazione, trasportiamo $F_1(s)$ a valle del secondo nodo sommatore; per far ciò moltiplichiamo per $F_1(s)$ tutti i rami in uscita dal sommatore, mentre dividiamo tutti i nodi in ingresso al sommatore per la stessa quantità; in tal modo i due nodi sommatori collassano l'uno sull'altro. Il risultato è mostrato in Figura 2. Possiamo infine eliminare il loop di retroazione che coinvolge l'uscita $y_1(t)$ e spostare la funzione di trasferimento $F_3(s)$, ottenendo lo schema a blocchi definitivo mostrato in Figura 3. A questo punto è abbastanza agevole determinare le trasformate di Laplace delle due uscite in funzione dei due ingressi; si ha infatti:

$$Y_1(s) = \frac{-F_1(s)F_2(s)}{1 - F_1(s)F_2(s)}U_1(s) + \frac{F_3(s)F_2(s)}{1 - F_1(s)F_2(s)}U_2(s)$$

$$Y_2(s) = [F_3(s)F_4(s)]U_2(s).$$

La matrice di trasferimento avrà la forma:

$$\boldsymbol{W}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{bmatrix}$$

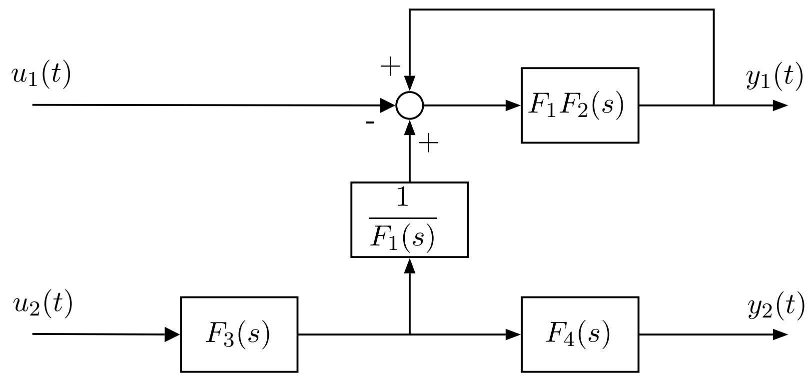

Figura 2: Schema a blocchi modificato

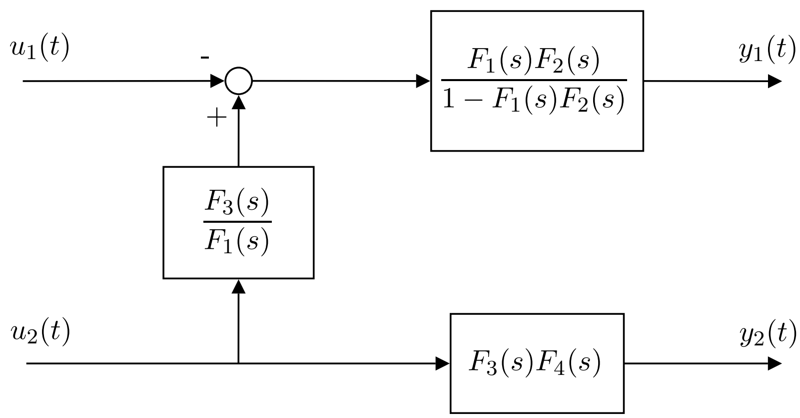

Figura 3: Schema a blocchi definitivo

e le varie funzioni di trasferimento $W_{ij}(s)$ si ottengono come

$$W_{11}(s) = \left.\frac{Y_1(s)}{U_1(s)}\right|_{U_2(s)=0} = \frac{-F_1(s)F_2(s)}{1-F_1(s)F_2(s)} = \frac{-3}{s^3+s^2-3};$$

$$W_{12}(s) = \left.\frac{Y_1(s)}{U_2(s)}\right|_{U_1(s)=0} = \frac{F_3(s)F_2(s)}{1-F_1(s)F_2(s)} = \frac{4s+4}{s^4+3s^3+2s^2-3s-6};$$

$$W_{21}(s) = \left.\frac{Y_2(s)}{U_1(s)}\right|_{U_2(s)=0} = 0;$$

$$W_{22}(s) = \left.\frac{Y_2(s)}{U_2(s)}\right|_{U_1(s)=0} = F_3(s)F_4(s) = \frac{12s+8}{s^3+5s^2+6s}.$$

Tecnica alternativa

Esiste, per il calcolo della matrice di trasferimento, una tecnica alternativa a quella mostrata, e che non fa ricorso alle regole dell'algebra degli schemi a blocchi ma all'uso di segnali intermedi tra gli ingressi e le uscite. Questa tecnica può in alcuni casi essere più comoda rispetto alla manipolazione dello schema a blocchi.

Si consideri lo schema a blocchi modificato in Figura 4, nel quale sono stati introdotti i segnali intermedi $R_i(s)$. Si ha evidentemente, per l'uscita

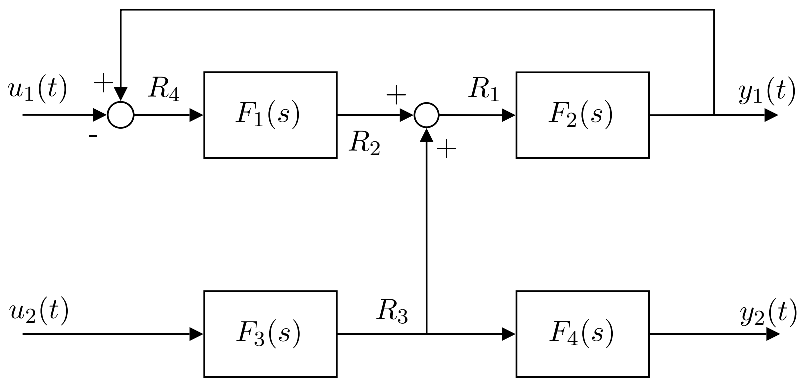

Figura 4: Schema a blocchi con l'introduzione dei segnali intermedi

$y_1(t)$:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= F_2(s)R_1(s) = F_2(s)(R_2(s) + R_3(s)) = \\ &= F_2(s)(F_1(s)R_4(s) + F_3(s)U_2(s)) = \\ &= F_1(s)F_2(s)(Y_1(s) - U_1(s)) + F_2(s)F_3(s)U_2(s), \end{aligned}$$

E riordinando e isolando $Y_1(s)$ a primo membro si ottiene

$$Y_1(s) = \frac{-F_1(s)F_2(s)}{1 - F_1(s)F_2(s)}U_1(s) + \frac{F_3(s)F_2(s)}{1 - F_1(s)F_2(s)}U_2.$$

Per la seconda uscita vale invece:

$$Y_2(s) = R_3(s)F_4(s) = F_3(s)F_4(s)U_2(s).$$

I risultati sono ovviamente consistenti con quelli ricavati con il metodo precedente.