Correzione dell'Esercitazione 5

Stefano Angioni

3 dicembre 2005

Esercizio 1

In questo esercizio vengono assegnate delle funzioni del tempo, definite per $t \geq 0$, e si richiede di calcolarne la trasformata di Laplace. La prima funzione è

$$f(t) = 3e^{-4t}\delta_{-1}(t)$$

e, per la linearità dell'operatore *trasformata di Laplace* possiamo scrivere

$$\mathcal{L}\{3e^{-4t}\} = 3\mathcal{L}\{e^{-4t}\} = \frac{3}{s+4}$$

Dobbiamo ora calcolare la $\mathcal{L}$–trasformata della funzione

$$f(t) = (t-3)\delta_{-1}(t).$$

Notiamo innanzitutto che non possiamo fare alcun utilizzo delle relazioni che legano le funzioni ritardate nel tempo e le loro trasformate, in quanto sebbene $(t-3)$ possa essere vista come una retta di pendenza unitaria traslata di 3 sull'asse positivo dei tempi, non si può dire lo stesso del gradino unitario che la moltiplica, dato che il suo argomento è t, e non $t-3$. Detto questo, per linearità si può scrivere

$$f(t) = (t-3)\delta_{-1}(t) = t\delta_{-1}(t) - 3\delta_{-1}(t),$$

per cui possiamo scrivere

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s} = \frac{1-3s}{s^2}.$$

Dobbiamo ora calcolare la trasformata della funzione

$$f(t) = (t^2+1)\delta_{-1}(t);$$

ancora una volta possiamo scrivere

$$f(t) = (t^2+1)\delta_{-1}(t) = t^2\delta_{-1}(t) + \delta_{-1}(t),$$

e quindi

$$F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s} = \frac{s^2+2}{s^3}.$$

La quarta funzione da trasformare è

$$f(t) = (t+2)^2 e^t \delta_{-1}(t) = (t^2+4t+4)e^t \delta_{-1}(t),$$

per cui possiamo servirci del noto risultato secondo cui

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s-a)$$

ed è quindi immediato scrivere:

$$F(s) = \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{4}{(s-1)}.$$

Infine, l'ultima funzione che viene proposta e di cui dobbiamo determinare la trasformata di Laplace è

$$f(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\delta_{-1}(t).$$

Neanche in questo caso possiamo utilizzare le proprietà dell'elemento di ritardo in t, dato che l'argomento della δ_{-1} non è altrettanto ritardato. Abbiamo perciò

$$f(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\delta_{-1}(t) = \cos(t)\cos\frac{\pi}{4} + \sin(t)\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\,\cos(t) + \sin(t)\right]$$

e da ciò è immediato scrivere

$$F(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{s+1}{s^2+1}$$

Esercizio 2

Questo esercizio consiste nel calcolo della trasformata di una funzione periodica assegnata in forma grafica. Come prima cosa dobbiamo cercare di scrivere l'espressione analitica della *funzione base* $f_0(t)$ che viene replicata in ogni periodo di durata $T = 2$. Essa è data dalla composizione di:

- un gradino unitario applicato nell'origine: $f_1(t) = \delta_{-1}(t)$
- una retta con pendenza -2 applicata nell'origine: $f_2(t) = -2t\delta_{-1}(t)$;
- una retta con pendenza 4 applicata per $t \geq 1$, che rende la pendenza di $f_0(t)$ pari a 2: $f_3(t) = 4(t-1)\delta_{-1}(t-1)$;
- una retta con pendenza -2 applicata per $t \geq 2$, che annulla la pendenza totale di $f_0(t)$: $f_4(t) = -2(t-2)\delta_{-1}(t-2)$;

- un gradino unitario di ampiezza -1 applicato in $t = 2$ che porta il valore di $f_0(t)$ ad annullarsi per $t \geq 2$: $f_5(t) = -\delta_{-1}(t-2)$.

Perciò possiamo scrivere che

$$f_0(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t) + f_5(t)$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} F_0(s) &= F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + F_4(s) + F_5(s) = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s^2}e^{-s} - \frac{2}{s^2}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-2s} = \\ &= \frac{s - 2 + 4e^{-s} - 2e^{-2s} - se^{-2s}}{s^2}. \end{aligned}$$

Ora, la trasformata di una funzione periodica $f(t)$ con periodo T e funzione base $f_0(t)$ si scrive

$$F(s) = \frac{F_0(s)}{1 - e^{-Ts}},$$

perciò nel nostro caso vale:

$$F(s) = \frac{s - 2 + 4e^{-s} - 2e^{-2s} - se^{-2s}}{s^2(1 - e^{-2s})}.$$

Esercizio 3

Per verificare il teorema del valore finale, dobbiamo assicurarci che esista, finito, il $\lim_{t\to\infty} f(t)$, condizione senza la quale il suddetto teorema non è applicabile. Calcoliamo allora il limite:

$$\lim_{t\to\infty}(2 - e^{-3t}) = 2.$$

Dato che il limite esiste finito, possiamo ora calcolare la funzione $F(s)$, trasformata di Laplace di $f(t)$:

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+3} = \frac{s+6}{s(s+3)},$$

e infine il seguente limite:

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{s+6}{s+3}\right) = 2.$$

Perciò i due limiti coincidono, ed il teorema è verificato.

Esercizio 4

Il teorema del valore iniziale è applicabile se esiste il $\lim_{s\to\infty} sF(s)$, perciò innanzitutto calcoliamo la $\mathcal{L}$–trasformata della $f(t)$:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s^2};$$

a questo punto passiamo al calcolo del

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s+1}{s} = 1.$$

È immediato, a questo punto, verificare che vale

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+) = 1.$$

Esercizio 5

L'antitrasformazione di funzioni razionali si basa su una procedura standard che prevede l'espansione in fratti semplici (che sfrutta lo sviluppo di Heaviside), e sull'antitrasformazione, agevole, dei singoli termini di tale sviluppo. Consideriamo la prima funzione che ci viene proposta:

$$F(s) = \frac{2s+5}{s^3+6s^2+21s+26} = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

La prima cosa da fare è determinare i poli di $F(s)$, ovvero gli zeri di $D(s)$. Uno di essi, $p_1 = -2$, viene fornito dal testo dell'esercizio; possiamo quindi scrivere il denominatore come $D(s) = Q(s)(s+2)$, e per determinare il polinomio $Q(s)$ applichiamo l'algoritmo della divisione lunga tra polinomi (in alternativa si può utilizzare il metodo tabellare di Ruffini) e componiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{cccc||ccc}
1 & 6 & 21 & 26 & 1 & 2 & \\
\hline\hline
1 & 2 & & & 1 & 4 & 13 \\
\cline{1-4}
 & 4 & 21 & 26 & & & \\
 & 4 & 8 & & & & \\
\cline{2-4}
 & & 13 & 26 & & & \\
 & & 13 & 26 & & & \\
\cline{3-4}
 & & 0 & 0 & & &
\end{array}$$

da cui vediamo che $D(s) = (s+2)(s^2+4s+13)$. Il polinomio $Q(s)$ ha le radici complesse e coniugate $p_{2,3} = -2 \pm 3j$, perciò secondo lo sviluppo di Heaviside possiamo scrivere che:

$$F(s) = \frac{R_1}{s+2} + \frac{R_2}{s+2-3j} + \frac{R_2'}{s+2+3j}, \tag{1}$$

dove R_2' è il coniugato di R_2. Possiamo quindi passare al calcolo dei residui R_1 ed R_2:

$$R_1 = \lim_{s \to -2} (s+2) \frac{2s+5}{(s+2)(s^2+4s+13)} = \frac{1}{9}$$

$$R_2 = \lim_{s \to -2+3j} (s+2-3j)F(s) = \lim_{s \to -2+3j} \frac{2s+5}{(s+2)(s+2+3j)} = -\frac{1+6j}{18}.$$

La $F(s)$ si può pertanto scrivere come

$$F(s) = \frac{1}{9(s+2)} - \frac{1+6j}{18(s+2-3j)} - \frac{1-6j}{18(s+2+3j)},$$

e la sua antitrasformata $f(t)$ avrà la forma

$$f(t) = \left[\frac{1}{9} e^{-2t} + M e^{-2t} \cos(3t+\phi) \right] \delta_{-1}(t) \tag{2}$$

dove:

$$M = 2|R_2| = 2\sqrt{\frac{1^2+6^2}{18^2}} = 0.67$$

$$\phi = \arg(R_2) = \arctan\left(\frac{-6}{-1}\right) = -1.73$$

e perciò la (2) diventa

$$f(t) = \left[\frac{1}{9} e^{-2t} + 0.67 e^{-2t} \cos(3t - 1.73) \right] \delta_{-1}(t).$$

Passiamo ora alla seconda funzione razionale di cui dobbiamo determinare l'antitrasformata:

$$F(s) = \frac{s^2+4s}{(s+2)^3}.$$

In questo caso ci troviamo in presenza di un unico polo, $p = -2$, avente molteplicità $\nu = 3$, e pertanto lo sviluppo di Heaviside della $F(s)$ sarà

$$F(s) = \frac{R_{1,0}}{(s+2)} + \frac{R_{1,1}}{(s+2)^2} + \frac{R_{1,2}}{(s+2)^3}. \tag{3}$$

Possiamo perciò dedicarci al calcolo dei tre residui:

$$R_{1,2} = \lim_{s \to -2} (s+2)^3 F(s) = \lim_{s \to -2} s^2 + 4s = -4$$

$$R_{1,1} = \lim_{s \to -2} \frac{d}{ds} (s+2)^3 F(s) = \lim_{s \to -2} 2s + 4 = 0$$

$$R_{1,0} = \frac{1}{2} \lim_{s \to -2} \frac{d^2}{ds^2} (s+2)^3 F(s) = \frac{1}{2} \lim_{s \to -2} 2 = 1$$

e sostituendo tali valori nella (3), otteniamo

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)} - \frac{4}{(s+2)^3},$$

che, antitrasformata, diventa

$$f(t) = (1 - 2t^2)e^{-2t}\delta_{-1}(t).$$

L'ultima funzione razionale che propone il testo dell'esercizio è

$$F(s) = \frac{2s^3 + 5s^2 + 7s + 6}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4},$$

e come si vede, è una funzione propria ma non strettamente, dato che il grado del polinomio a denominatore è pari al grado del polinomio a numeratore; prima di passare allo sviluppo di Heaviside dobbiamo perciò eseguire la divisione tra i due polinomi. Costruiamo perciò la tabella

$$\begin{array}{cccc||cccc}
2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 5 & 8 & 4 \\ \hline\hline
2 & 10 & 16 & 8 & 2 & & & \\ \cline{1-4}
 & -5 & -9 & -2 & & & &
\end{array}$$

da cui si ricava che la funzione di partenza può essere riscritta come

$$F(s) = 2 - \frac{5s^2 + 9s + 2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = 2 - G(s),$$

ovvero come la somma di un termine costante e di una nuova funzione razionale, questa volta strettamente propria, la $G(s)$. Dobbiamo pertanto occuparci dello sviluppo in fratti della $G(s)$. Uno dei suoi poli, $p_1 = -1$, ci viene fornito dal testo; applichiamo questa volta l'algoritmo di Ruffini per determinare la fattorizzazione del polinomio a denominatore della $G(s)$:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 5 & 8 & 4 \\
 & & & & \\
-1 & & -1 & -4 & -4 \\ \hline
 & 1 & 4 & 4 & 0
\end{array}$$

e pertanto possiamo scrivere che

$$G(s) = \frac{5s^2 + 9s + 2}{(s+1)(s^2 + 4s + 4)} = \frac{5s^2 + 9s + 2}{(s+1)(s+2)^2}.$$

La $G(s)$ ha pertanto un polo $p_1 = -1$ di molteplicità unitaria, e un polo $p_2 = -2$ con molteplicità $\nu_2 = 2$. Secondo lo sviluppo in fratti semplici possiamo scrivere quindi:

$$G(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_{2,0}}{s+2} + \frac{R_{2,1}}{(s+2)^2};$$

ed i residui valgono

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \lim_{s\to -1}(s+1)G(s) = \lim_{s\to -1}\frac{5s^2+9s+2}{s^2+4s+4} = 2\\
R_{2,1} &= \lim_{s\to -2}(s+2)^2 G(s) = \lim_{s\to -2}\frac{5s^2+9s+2}{s+1} = -4\\
R_{2,0} &= \lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}(s+2)^2 G(s) = \lim_{s\to -2}\frac{5s^2+10s+7}{(s+1)^2} = 7
\end{aligned}
$$

e, in definitiva, si ha

$$
F(s) = 2 - \left[\frac{2}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{4}{(s+2)^2}\right],
$$

e passando al dominio del tempo, otteniamo

$$
f(t) = 2\delta(t) + \left[(4t-1)e^{-2t} - 2e^{-t}\right]\delta_{-1}(t).
$$

Come si può vedere, nell'antitrasformata di una funzione razionale propria ma non strettamente, compare sempre un termine impulsivo, la cui ampiezza è pari al rapporto a_n/b_n tra i due termini di grado massimo, rispettivamente al numeratore e al denominatore.