Correzione dell'Esercitazione 4

Stefano Angioni

17 novembre 2005

Esercizio 1

Questo esercizio tratta dell'analisi, nel dominio del tempo, di un sistema dinamico rappresentato mediante variabili di stato.

Autovalori, autovettori e modi della matrice A

La matrice A della nostra rappresentazione è

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 2 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$$

La prima cosa da fare è determinare i suoi *autovalori*; per far ciò dobbiamo scrivere il *polinomio caratteristico* associato alla matrice A. Tale polinomio è il determinante della matrice $(A - \lambda I_2)$. Ovvero

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} (-13-\lambda) & 2 \\ 3 & (-8-\lambda) \end{vmatrix}$$

Il calcolo di tale determinante non presenta alcun problema, ma per le matrici quadrate di ordine 2 è possible dare una formula generale che semplifica i conti e riduce la possibilità di errori nello svolgimento degli esercizi:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) \tag{1}$$

dove con $\mathrm{tr}(A)$ si denota la *traccia* della matrice A, ovvero la somma degli elementi lungo la diagonale principale. Particolarizzando la (1) nel caso in esame, si ottiene

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 21\lambda + 98,$$

le cui radici, ovvero gli autovalori della matrice A, sono $\lambda_1 = -7$ e $\lambda_2 = -14$. Possiamo quindi dire che alla matrice A sono associati due modi aperiodici stabili, $e^{\lambda_1 t} = e^{-7t}$, ed $e^{\lambda_2 t} = e^{-14t}$.

Vediamo ora come procedere al calcolo degli *autovettori*.

Ricordiamo che un vettore $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ è autovettore della matrice A relativo all'autovalore λ se vale la seguente eguaglianza

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}. \tag{2}$$

Per determinare gli autovettori dobbiamo pertanto risolvere il sistema lineare

$$(A - \lambda I_2)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

sostituendo a λ i due autovalori determinati in precedenza. Ovvero, per λ_1:

$$(A + 7I_2)\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da entrambe le equazioni si ricava $v_{1,2} = 3v_{1,1}$. Possiamo quindi scegliere una delle due componenti in maniera arbitraria e determinare l'altra di conseguenza. Ponendo ad esempio $v_{1,1} = 1$ abbiamo

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Svolgiamo ora gli stessi passaggi per λ_2 e otteniamo

$$(A + 14I_2)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ricava $v_{2,1} = -2v_{2,2}$. Scegliamo per comodità $v_{2,2} = 1$ e otteniamo

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcolo della matrice di transizione dello stato e^{At}

Lo sviluppo di Sylvester permette di calcolare la matrice di transizione dello stato mediante la formula

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(t) A^i \tag{3}$$

dove n è l'ordine della matrice *quadrata* A. Perciò, nel nostro caso, la (3) diventa

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{1} \beta_i(t) A^i = \beta_0(t) I_2 + \beta_1(t) A, \tag{4}$$

dove restano da determinare le funzioni $\beta_i(t)$.

Nel caso in cui gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$ hanno tutti molteplicità unitaria, i coefficienti $\beta_i(t)$ della combinazione lineare (3), sono soluzione del sistema lineare

$$V\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\eta}, \tag{5}$$

dove V è una *matrice di Vandermonde*:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

i λ_i sono gli autovalori della matrice A, $\boldsymbol{\beta}$ è il vettore delle funzioni incognite:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

e $\boldsymbol{\eta}$ è il termine noto del sistema, contenente i modi associati alla matrice A:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Nel nostro caso, la (5) diventa

$$V\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\eta} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-7t} \\ e^{-14t} \end{bmatrix} \tag{6}$$

da cui si ricava che $\beta_0(t) = 2e^{-7t} - e^{-14t}$ e $\beta_1(t) = \frac{1}{7}(e^{-7t} - e^{-14t})$. Pertanto

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-7t} - e^{-14t} & 0 \\ 0 & 2e^{-7t} - e^{-14t} \end{bmatrix} + \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 13(e^{-14t} - e^{-7t}) & 2(e^{-7t} - e^{-14t}) \\ 3(e^{-7t} - e^{-14t}) & 8(e^{-14t} - e^{-7t}) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} (e^{-7t} + 6e^{-14t}) & 2(e^{-7t} - e^{-14t}) \\ 3(e^{-7t} - e^{-14t}) & (6e^{-7t} + e^{-14t}) \end{bmatrix}.$$

È immediato a questo punto notare che ciascun elemento della matrice di transizione dello stato è una combinazione lineare dei modi e^{-7t} e e^{-14t}.

Verificare che vale $\left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At}$

Per effettuare tale verifica, calcoliamo dapprima l'inversa della matrice di transizione dello stato; ricordiamo a tal proposito che l'inversa di una matrice M si scrive:

$$M^{-1} = \frac{\mathrm{agg}(M)}{\det(M)}, \tag{7}$$

dove con agg(M) si indica la matrice *aggiunta* di M, ovvero la matrice trasposta dei cofattori della matrice M. Calcoliamo quindi agg(e^{At}):

$$\text{agg}(e^{At}) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} (6e^{-7t} + e^{-14t}) & -2(e^{-7t} - e^{-14t}) \\ \\ -3(e^{-7t} - e^{-14t}) & (e^{-7t} + 6e^{-14t}) \end{bmatrix}$$

e successivamente il determinante di e^{At}:

$$\begin{aligned}\det(e^{At}) &= \frac{1}{7^2}[(e^{-7t} + 6e^{-14t})(6e^{-7t} + e^{-14t}) - 6(e^{-7t} - e^{-14t})(e^{-7t} - e^{-14t})] = \\ &= \frac{1}{49}49e^{-21t} = e^{-21t}.\end{aligned}$$

Se ora applichiamo la (7) alla e^{At} otteniamo

$$\begin{aligned}\left[e^{At}\right]^{-1} = \frac{\text{agg}(e^{At})}{\det(e^{At})} &= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} \dfrac{(6e^{-7t} + e^{-14t})}{e^{-21t}} & \dfrac{-2(e^{-7t} - e^{-14t})}{e^{-21t}} \\ \\ \dfrac{-3(e^{-7t} - e^{-14t})}{e^{-21t}} & \dfrac{(e^{-7t} + 6e^{-14t})}{e^{-21t}} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} (e^{7t} + 6e^{14t}) & 2(e^{7t} - e^{14t}) \\ \\ 3(e^{7t} - e^{14t}) & (6e^{7t} + e^{14t}) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

che coincide proprio con la matrice di transizione dello stato, nella quale vengano cambiati i segni degli esponenziali.

Trasformazione per ottenere una rappresentazione diagonale

Poichè nel caso in esame gli autovalori sono distinti, scelta

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} \end{bmatrix} \tag{8}$$

dove i $\boldsymbol{v}_i$ sono gli autovettori della matrice $\boldsymbol{A}$, si ottiene

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}.$$

Si noti che essendo $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ determinati a meno di una costante arbitraria, è ovvio che le trasformazioni di similitudine che portano ad una rappresentazione in cui la matrice di stato è diagonale, sono infinite.

Calcolo della rappresentazione diagonale

Una volta determinata la matrice di similitudine, è immediato passare alla rappresentazione diagonale, che sarà nella forma:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}}(t) & = A'\boldsymbol{z}(t) + B'u(t) \\ \boldsymbol{y}(t) & = C'\boldsymbol{z}(t) + D'u(t) \end{cases}$$

dove le nuove matrici sono date dalle formule

$$A' = P^{-1}AP \quad B' = P^{-1}B$$

$$C' = CP \qquad D' = D$$

La matrice A' è stata determinata al punto precedente. Inoltre vale

$$B' = P^{-1}B = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C' = CP = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad D' = D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinare lo stato $\boldsymbol{z}(0)$ della rappresentazione diagonale

Essendo $\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{z}(t)$, vale naturalmente $\boldsymbol{z}(t) = P^{-1}\boldsymbol{x}(t)$. In particolare, per $t = 0$, vale

$$\boldsymbol{z}(0) = P^{-1}\boldsymbol{x}(0) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Evoluzione dello stato $\boldsymbol{z}(t)$ mediante la formula di Lagrange

In virtù della formula di Lagrange, vale

$$\boldsymbol{z}(t) = e^{A't}\boldsymbol{z}(0) + \int_0^t e^{A'(t-\tau)}B'u(\tau)d\tau, \tag{9}$$

perciò la prima cosa da fare è calcolare la matrice di transizione dello stato per la nuova rappresentazione diagonale, ovvero la $e^{A't}$. Questa operazione non presenta alcuna difficoltà se ricordiamo che per una matrice diagonale vale

$$e^{A't} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}),$$

dove i λ_i sono gli elementi lungo la diagonale di A'; si ha pertanto, nel nostro caso,

$$e^{A't} = \begin{bmatrix} e^{-7t} & 0 \\ 0 & e^{-14t} \end{bmatrix}.$$

Siamo quindi pronti al calcolo della (9). Iniziamo dal primo addendo, $e^{A't}\boldsymbol{z}(0)$, nel quale riconosciamo l'*evoluzione libera* dello stato, dato che in esso intervengono le condizioni iniziali ma non l'ingresso:

$$\boldsymbol{z}_l(t) = e^{A't}\boldsymbol{z}(0) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-7t} & 0 \\ 0 & e^{-14t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5e^{-7t} \\ -e^{-14t} \end{bmatrix}$$

e passiamo poi al calcolo del secondo addendo, ricordando che vale

$$u(t) = \begin{cases} \cos(2t) & t \in [0, 10), \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}.$$

Il calcolo dell'evoluzione forzata, per modelli in variabili di stato è analogo al calcolo dell'integrale di Duhamel per quanto riguarda i modelli espressi in termine di legame IU. Avremo quindi per $t \geq 0$

$$\boldsymbol{z}_f(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t e^{A'(t-\tau)} B' u(\tau) d\tau = e^{A't} \int_0^t e^{-A'\tau} B' \cos(2\tau) d\tau & t \in [0, 10) \\ \displaystyle\int_0^{10} e^{A'(t-\tau)} B' u(\tau) d\tau = e^{A't} \int_0^{10} e^{-A'\tau} B' \cos(2\tau) d\tau & t \geq 10 \end{cases} \tag{10}$$

dove la matrice $e^{A't}$ è costante rispetto alla variabile d'integrazione τ e può quindi essere portata fuori dal segno di integrale. L'integrando vale quindi

$$e^{-A'\tau} B' u(\tau) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{7\tau} & 0 \\ 0 & e^{14\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(2\tau) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5e^{7\tau} \cos(2\tau) \\ -e^{14\tau} \cos(2\tau) \end{bmatrix}.$$

Ricordando ora l'integrale notevole

$$\int e^{\alpha t} \cos(\omega t) dt = \frac{e^{\alpha t} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\right]}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

si ottiene, dalle (10),

$$\boldsymbol{z}_f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{7} \begin{bmatrix} 0.68 \cos(2t - 0.28) - 0.65 e^{-7t} \\ 0.06 e^{-14t} - 0.07 \cos(2t - 0.14) \end{bmatrix} & t \in [0, 10) \\ \\ \dfrac{1}{7} \begin{bmatrix} 1.11 \cdot 10^{30} e^{-7t} \\ -2.37 \cdot 10^{59} e^{-14t} \end{bmatrix} & t \geq 10 \end{cases}$$

Come si nota, finchè l'ingresso rimane *acceso*, lo stato risponde con un modo esponenziale, che tende ad annullarsi col tempo, più una componente che riproduce l'ingresso: quest'ultima è la cosiddetta *componente di regime*, mentre la prima è detta *componente transitoria*. Osserviamo quindi che, una volta estinto il transitorio, l'evoluzione dello stato segue l'ingresso come se si trattasse di un sistema istantaneo (a parte lo sfasamento). Per quanto riguarda l'evoluzione dello stato una volta *spento* il segnale d'ingresso, osserviamo che essa si riduce ad una combinazione lineare dei modi del sistema, come se fosse un'evoluzione libera.

Evoluzione dell'uscita e invarianza rispetto alla trasformazione di similitudine P

Per determinare l'evoluzione dell'uscita, consideriamo la *trasformazione di uscita* del modello in VS:

$$\boldsymbol{y}(t) = C'\boldsymbol{z}(t) + D'u(t),$$

ovvero non abbiamo bisogno di calcolare nuovamente l'integrale di Lagrange. Per quanto riguarda l'evoluzione *libera* dell'uscita, si avrà

$$\boldsymbol{y}_l(t) = C'\boldsymbol{z}_l(t) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5e^{-7t} \\ -e^{-14t} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 15e^{-7t} - e^{-14t} \\ 20e^{-7t} + e^{-14t} \end{bmatrix},$$

mentre per l'evoluzione forzata avremo

$$\boldsymbol{y}_f(t) = C'\boldsymbol{z}_f(t) + D'u(t)$$

e di conseguenza, per $t \in [0, 10)$, sarà

$$\boldsymbol{y}_f(t) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1.95e^{-7t} + 0.06e^{-14t} + 2.04\cos(2t - 0.28) - 0.07\cos(2t - 0.14) + 7\cos 2t \\ -2.6e^{-7t} - 0.06e^{-14t} + 2.72\cos(2t - 0.28) + 0.07\cos(2t - 0.14) \end{bmatrix}$$

mentre per $t \geq 10$, avremo un'evoluzione priva di componente di ingresso, e quindi

$$\boldsymbol{y}_f(t) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3.33 \cdot 10^{30}e^{-7t} - 2.37 \cdot 10^{59}e^{-14t} \\ 4.4 \cdot 10^{30}e^{-7t} + 2.37 \cdot 10^{59}e^{-14t} \end{bmatrix}.$$

Dimostriamo ora che l'uscita è invariante per trasformazioni di similitudine. Denotiamo come $\boldsymbol{y}'(t)$ l'uscita della rappresentazione di stato ottenuta per mezzo della trasfomazione di similitudine $\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{z}(t)$. Avremo allora

$$\boldsymbol{y}'(t) = C'\boldsymbol{z}(t) + D'\boldsymbol{u}(t) = CPP^{-1}\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{y}(t)$$

che coincide quindi con l'uscita della rappresentazione originaria. Si noti che non c'è alcun vincolo sulla trasformazione P (tranne il fatto che sia invertibile), per cui questo è un risultato di validità generale.

Esercizio 2

Matrice A_1

Esaminiamo la matrice A_1. Essa presenta un autovalore $\lambda_1 = -2$ con molteplicità $\nu = 4$, e il blocco di Jordan associato ha indice $\pi_1 = 4$; è inoltre presente un altro autovalore, questa volta singolo, $\lambda_2 = -3$. Possiamo perciò scrivere il *polinomio minimo* associato alla matrice A_1:

$$P_{min}(s) = (s+2)^4(s+3),$$

a cui associamo i modi e^{-2t}, te^{-2t}, t^2e^{-2t}, t^3e^{-2t}, ed e^{-3t}. La matrice è già in forma di Jordan, perciò la corrispondente matrice di transizione dello stato sarà:

$$e^{A_1t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} & \frac{t^3}{3!}e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Matrice A_2

La matrice A_2 presenta un autovalore $\lambda_1 = -2$ con molteplicità $\nu = 4$, a cui sono associati un blocco di Jordan di dimensione 3 ed uno di dimensione 1: possiamo affermare quindi che l'ordine di tale autovalore (che coincide con la dimensione del blocco più grande ad esso associato) è $\pi_1 = 3$; è inoltre presente un altro autovalore, questa volta singolo, $\lambda_2 = -3$. Possiamo perciò scrivere il polinomio minimo associato alla matrice A_2:

$$P_{min}(s) = (s+2)^3(s+3),$$

a cui associamo i modi e^{-2t}, te^{-2t}, t^2e^{-2t}, ed e^{-3t}. La matrice è già in forma di Jordan, perciò la corrispondente matrice di transizione dello stato sarà:

$$e^{A_2t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Matrice A_3

La matrice A_3 presenta un autovalore $\lambda_1 = -2$ con molteplicità $\nu = 4$, a cui sono associati quattro blocchi di Jordan di dimensione 1: l'ordine di tale autovalore è quindi $\pi_1 = 1$; è inoltre presente l'autovalore singolo, $\lambda_2 = -3$. Scriviamo il polinomio minimo associato alla matrice A_3:

$$P_{min}(s) = (s+2)(s+3),$$

a cui associamo i modi e^{-2t}, ed e^{-3t}. La matrice è già in forma di Jordan, perciò la corrispondente matrice di transizione dello stato sarà:

$$e^{A_3t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Matrice A_4

La matrice A_4 presenta un autovalore $\lambda_1 = -2$ con molteplicità $\nu = 4$, a cui sono associati due blocchi di Jordan di dimensione 2: l'ordine di tale autovalore è quindi $\pi_1 = 2$; è inoltre presente l'autovalore singolo, $\lambda_2 = -3$. Scriviamo il polinomio minimo associato alla matrice A_3:

$$P_{min}(s) = (s+2)^2(s+3),$$

a cui associamo i modi e^{-2t}, te^{-2t}, ed e^{-3t}. La matrice è già in forma di Jordan, perciò la corrispondente matrice di transizione dello stato sarà:

$$e^{A_4 t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$