

# Analisi dei Sistemi — Esercitazione 4

5 Novembre 2005

**Esercizio 1.** È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 2 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si calcolino gli autovalori, gli autovettori e i modi della matrice  $A$ .
2. Si calcoli, mediante lo sviluppo di Sylvester, la matrice di transizione dello stato  $e^{At}$  e si verifichi che ogni suo elemento è una combinazione lineare di modi.
3. Si verifichi che l'inversa della matrice di transizione dello stato vale  $e^{-At}$ .
4. Si determini, se possibile, una trasformazione di similitudine  $z(t) = Px(t)$  che permetta di passare ad una rappresentazione in cui la matrice di stato  $\Lambda = P^{-1}AP$  è in forma diagonale. Si discuta se tale trasformazione è unica.
5. Determinata una trasformazione diagonalizzante, si calcoli la corrispondente rappresentazione.
6. Si determini lo stato iniziale  $z(0)$  della rappresentazione diagonale che corrisponde allo stato iniziale  $x(0) = [1 \ 2]^T$  della rappresentazione originale.
7. Si determini, mediante la formula di Lagrange, l'evoluzione dello stato  $z(t)$  della rappresentazione diagonale a partire dalla condizione iniziale data al punto precedente e conseguente all'applicazione dell'ingresso

$$u(t) = \begin{cases} \cos(2t) & \text{per } t \in [0, 10) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si specifichi quale termine della evoluzione dello stato corrisponde all'evoluzione libera e quale all'evoluzione forzata.

8. Si determini, nelle stesse condizioni del punto precedente, l'evoluzione dello stato  $x(t)$  della rappresentazione originale.
9. Si determini, nelle stesse condizioni del punto precedente, l'evoluzione dell'uscita  $y(t)$ . Si dimostri perchè tale valore non dipende dalla rappresentazione considerata.

**Esercizio 2.** Si determinino i modi relativi alle seguenti matrici in forma di Jordan e si scrivano le corrispondenti matrici di transizione dello stato:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$