Correzione dell'Esercitazione 3

Stefano Angioni

2 novembre 2005

1 Esercizio 1

Il testo dell'esercizio fornisce il modello di un sistema lineare e stazionario in termini di relazione ingresso–uscita

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 3u(t), \tag{1}$$

e richiede di verificare l'espressione della sua risposta impulsiva. Tale risposta rappresenta l'evoluzione forzata (ovvero a partire da condizioni iniziali nulle) con cui l'uscita di un sistema risponde ad un ingresso nella forma di un impulso di Dirac, ovvero $u(t) = \delta(t)$; tale risposta è sufficiente a caratterizzare completamente il comportamento di un sistema dinamico di tipo LTI (*Lineare e Tempo Invariante*).

Per svolgere tale verifica il procedimento da seguire è sostituire la $w(t)$ e le sue derivate al posto della $y(t)$ e delle sue derivate, nella relazione (1), e altrettanto va fatto sostituendo la $\delta(t)$ e le sue derivate al secondo membro. Se la $w(t)$ che viene fornita è effettivamente la risposta impulsiva del sistema, bisognerà ottenere un'identità. Procediamo quindi con il calcolo della derivata prima e della derivata seconda della $w(t)$, ricordando l'espressione notevole

$$\frac{d}{dt}[f(t)\delta_{-1}(t)] = [\dot{f}(t)]\delta_{-1}(t) + f(0)\delta(t)$$

per la derivazione di funzioni che presentino una discontinuità nell'origine. Si ottiene dunque

$$\begin{aligned}
\dot{w}(t) &= -\frac{3}{4}e^{-t}\delta_{-1}(t) + \frac{135}{4}e^{-5t}\delta_{-1}(t) - 6\delta(t) + \delta_1(t) \\
\ddot{w}(t) &= \frac{3}{4}e^{-t}\delta_{-1}(t) - \frac{675}{4}e^{-5t}\delta_{-1}(t) + \frac{132}{4}\delta(t) - 6\delta_1(t) + \delta_2(t)
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo effettuare la sostituzione nella (1) ottenendo

$$\ddot{w}(t) + 6\dot{w}(t) + 5w(t) = \delta_2(t) + 2\delta(t),$$

ossia

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{4}e^{-t}\delta_{-1}(t) - \frac{675}{4}e^{-5t}\delta_{-1}(t) + 33\delta(t) - 6\delta_1(t) + \delta_2(t) + \\
&-\frac{18}{4}e^{-t}\delta_{-1}(t) + \frac{810}{4}e^{-5t}\delta_{-1}(t) - 36\delta(t) + 6\delta_1(t) + \\
&+\frac{15}{4}e^{-t}\delta_{-1}(t) - \frac{135}{4}e^{-5t}\delta_{-1}(t) + 5\delta(t) = \\
&= 2\delta(t) + \delta_2(t)
\end{aligned}$$

e, svolgendo le somme, si vede che questa eguaglianza è sempre verificata. Dunque l'espressione della risposta impulsiva che viene fornita è quella corretta per questo sistema. In Figura 1 è mostrato l'andamento temporale della $w(t)$, tracciato con MATLAB. Bisogna qui osservare che il grafico tracciato

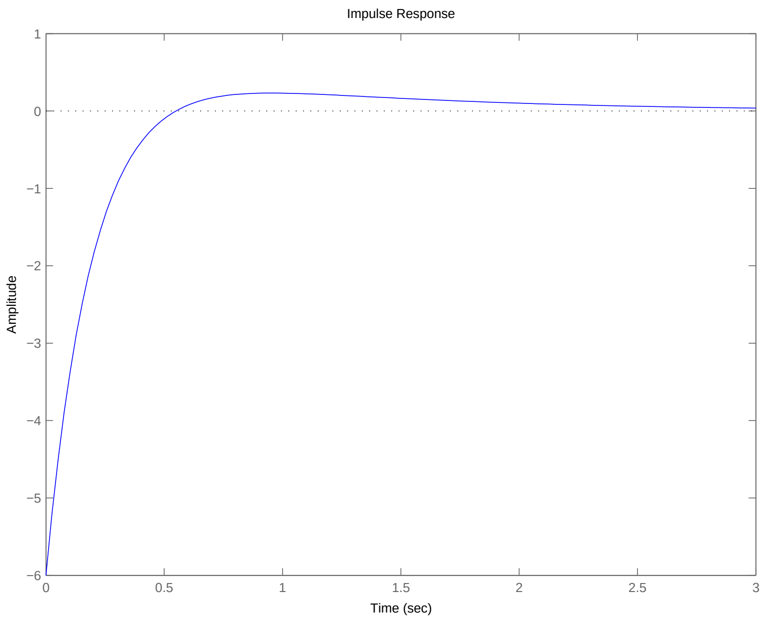

Figura 1: $w(t) = \frac{3}{4}(e^{-t} - 9e^{-5t})\delta_{-1}(t) + \delta(t)$

dal software è valido solo per tempi strettamente positivi, ovvero per $t > 0$, dato che per $t = 0$, come già detto, siamo in presenza di un impulso, non rappresentabile graficamente.

2 Esercizio 2

L'esercizio si divide in tre parti. Prima di tutto osserviamo il modello ingresso–uscita che ci viene dato da analizzare:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^2} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 10\frac{dy(t)}{dt} = 2\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 3u(t). \tag{2}$$

È un sistema LTI strettamente proprio, perciò nella risposta impulsiva che andremo a calcolare, mancherà il termine proporzionale a $\delta(t)$, ovvero $A_0 = 0$, e rimarrà solamente una combinazione lineare dei modi propri del sistema.

2.1 Calcolo della risposta impulsiva

Per prima cosa è necessario determinare il polinomio caratteristico $P(s)$ e le sue radici, ovvero i poli del sistema, che sono i responsabili della forma della risposta impulsiva (e di conseguenza, essendo quest'ultima un *regime canonico*, della risposta del sistema stesso, in generale). Abbiamo perciò

$$P(s) = s^3 + 2s^2 + 10s$$

che ha due radici complesse e coniugate $p_{1,2} = -1 \pm 3j$ e una radice reale $p_3 = 0$. Alle prime due corrisponde un modo pseudoperiodico stabile (essendo $\Re\{p_{1,2}\} < 0$, mentre al polo nell'origine corrisponde un modo costante al limite di stabilità; la risposta impulsiva assumerà quindi la forma

$$w(t) = (Me^{-t}\cos(3t + \phi) + A)\delta_{-1}(t).$$

Vogliamo ora determinare i coefficienti della combinazione lineare, e per fare ciò ci serviamo dell'Algoritmo 3.20 (pag. 73 del libro di testo). Determiniamo per prima cosa l'espressione della funzione $h(t)$, che è la parte della risposta impulsiva che moltiplica il gradino unitario:

$$h(t) = A + Me^{-t}\cos(3t + \phi),$$

per poi derivarla $(n - 1)$ volte, dove n è, al solito, l'ordine massimo di deivazione dell'uscita, in questo caso $n = 3$. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= -Me^{-t}\cos(3t + \phi) - 3Me^{-t}\sin(3t + \phi)\\ \ddot{h}(t) &= -8Me^{-t}\cos(3t + \phi) + 6Me^{-t}\sin(3t + \phi).\end{aligned}$$

A questo punto è necessario calcolare le quantità

$$\begin{aligned}h(0) &= A + M\cos\phi\\ \dot{h}(0) &= -Mcos\phi - 3M\sin\phi\\ \ddot{h}(0) &= -8M\cos\phi + 6M\sin\phi\end{aligned} \tag{3}$$

per poi scrivere il sistema lineare (di n equazione in n incognite)

$$\begin{cases} b_0 = a_1h(0) + a2\dot{h}(0) + a_3\ddot{h}(0)\\ b_1 = a_2h(0) + a_3\dot{h}(0)\\ b_2 = a_3h(0)\end{cases},$$

che, sostituendo le (3) appena calcolate, diventa

$$\begin{cases} 3 = 10A + 10M\cos\phi - 2M\cos\phi - 6M\sin\phi - 8M\cos\phi + 6M\sin\phi \\ 0 = 2A + 2M\cos\phi - M\cos\phi - 3M\sin\phi \\ 2 = A + M\cos\phi \end{cases}$$

e infine, semplificando,

$$\begin{cases} 10A_1 &= 3 \\ M\cos\phi - 3M\sin\phi + 2A_1 &= 0 \\ M\cos\phi + A_1 &= 2 \end{cases} \tag{4}$$

Da quest'ultimo si ricavano i valori $A_1 = 0.3$, $\phi = 0.42$ e $M = 1.86$. La risposta impulsiva relativa al sistema (2) sarà quindi:

$$w(t) = (1.86e^{-t}\cos(3t + 0.42) + 0.3)\delta_{-1}(t).$$

Ancora una volta, visualizziamo l'andamento temporale della $w(t)$ servendoci di MATLAB, e il grafico è riportato in Figura 2.

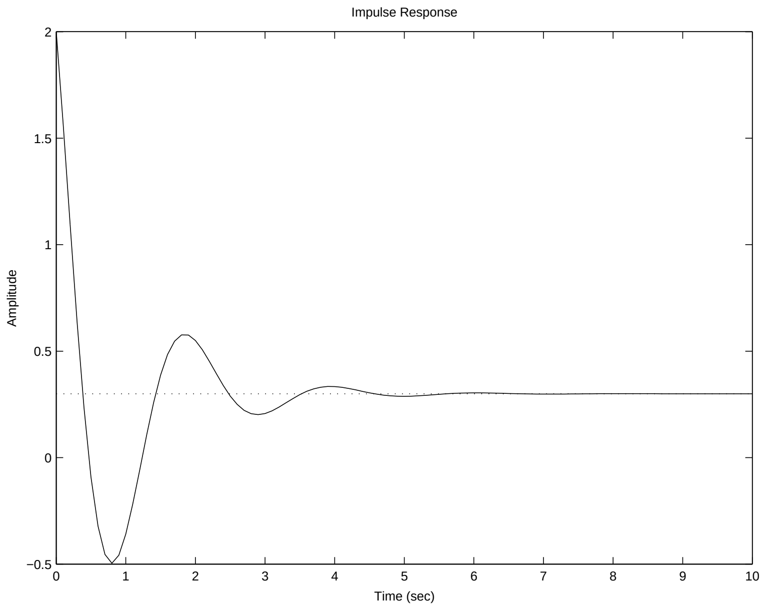

Figura 2: $w(t) = (1.86e^{-t}\cos(3t + 0.42) + 0.3)\delta_{-1}(t)$

2.2 Risposta forzata mediante integrale di Duhamel

La formula di Duhamel ci consente di ricavare l'evoluzione forzata di un sistema come convoluzione temporale tra l'ingresso $u(t)$ e la risposta impulsiva

$w(t)$, ovvero

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} w(t)u(t-\tau)d\tau. \tag{5}$$

Nel nostro caso l'ingresso $u(t)$ assume la forma

$$u(t) = \begin{cases} 2 & t \in [1,3) \\ -2 & t \in [3,5) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{6}$$

che graficamente si traduce in un periodo di onda quadra di ampiezza pari a 2 e con *duty cycle* del 50%, traslato di 1 sull'asse positivo dei tempi (vedere Figura 3). La procedura per il calcolo dell'integrale di Duhamel è abbastanza

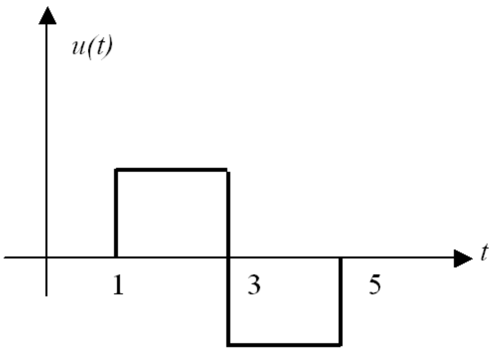

Figura 3: $u(t)$ per l'Esercizio 2

sistematica e non presenta grosse difficoltà di tipo teorico o concettuale; gli unici ostacoli per la risoluzione di questo esercizio sono dovuti al calcolo dell'integrale in sé. Prima di giustificare il risultato che si ottiene, scriviamo l'espressione della $y_f(t)$ dovuta all'ingresso $u(t)$:

$$y_f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 1) \\ 2\int_1^t w(t-\tau)d\tau & t \in [1,3) \\ 2\int_1^3 w(t-\tau)d\tau - 2\int_3^t w(t-\tau)d\tau & t \in [3,5) \\ 2\int_1^3 w(t-\tau)d\tau - 2\int_3^5 w(t-\tau)d\tau & t \in [5,+\infty) \end{cases} \tag{7}$$

Quello che si fa, in pratica, è suddividere l'asse dei tempi in intervalli significativi, e per ciascun intervallo si riassume la storia passata dell'ingresso. Così, ad esempio, fino all'istante $t = 1$ l'ingresso vale $u(t) = 0$ e quindi non c'è risposta forzata perché l'integrale di Duhamel è nullo; oppure se ci troviamo tra $t = 3$ e $t = 5$ abbiamo l'integrale di Duhamel tra 1 e 3, e poi tra 3 e t, con un coefficiente diverso dato che l'ingresso è variato. Notiamo anche che le equazioni (7), con una sostituzione di variabile $\rho = t - \tau$, diventano:

$$y_f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 1) \\ 2\int_0^{t-1} w(\rho)d\rho = y_{f,1}(t) & t \in [1, 3) \\ 2\int_{t-3}^{t-1} w(\rho)d\rho - 2\int_0^{t-3} w(\rho)d\rho = y_{f,2}(t) & t \in [3, 5) \\ 2\int_{t-3}^{t-1} w(\rho)d\rho - 2\int_{t-5}^{t-3} w(\rho)d\rho = y_{f,3}(t) & t \in [5, +\infty) \end{cases} \tag{8}$$

La risoluzione dell'esercizio si riduce quindi allo svolgimento di tanti integrali del tipo

$$\int e^{\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)dt = \frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}\cos\left(\omega t + \varphi - \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\right)$$

Si veda a proposito la tavola di integrali notevoli alla fine del Capitolo 3 del libro di testo. Facendo i calcoli si ottiene alla fine

$$\begin{aligned} y_{f,1}(t) &= 3.19e^{-t}\cos(3t - 4.47) + 0.6t - 0.71 \\ y_{f,2}(t) &= 3.19e^{-t}\cos(3t - 4.47) - 47.25e^{-t}\cos(3t - 10.47) - 0.6t + 3.11 \\ y_{f,3}(t) &= 3.19e^{-t}\cos(3t - 4.47) - 47.25e^{-t}\cos(3t - 10.47) + \\ &\quad + 5337.15e^{-t}\cos(3t - 16.47) \end{aligned}$$

Possiamo rappresentare graficamente la risposta forzata ottenuta mediante il calcolo degli integrali utilizzando MATLAB (si veda a tal proposito la Figura 4. Come si nota, in corrispondenza delle variazioni brusche dell'ingresso (rappresentato con il tratto nero), la risposta forzata presenta dei punti angolosi.

2.3 Considerazioni sulla $y_f(t)$ per $t > 5$

Dal calcolo dell'integrale di Duhamel risulta che la risposta, per $t > 5$ non è identicamente nulla, nonostante l'ingresso fornito al sistema sia nullo in tale intervallo temporale. Questo perché in realtà, per $t > 5$, la risposta del sistema è assimilabile ad una risposta libera (ovvero con condizioni iniziali non nulle e ingresso nullo), che evolve con la dinamica propria del sistema. Ora, essendo i modi del sistema stabili, la risposta tende ad annullarsi.

2.4 Codice MATLAB per la simulazione della risposta forzata

Di seguito è presentato il codice MATLAB per la simulazione della $y_f(t)$ dei punti precedenti. Le righe che cominciano con un simbolo di % sono dei commenti e non vengono valutate.

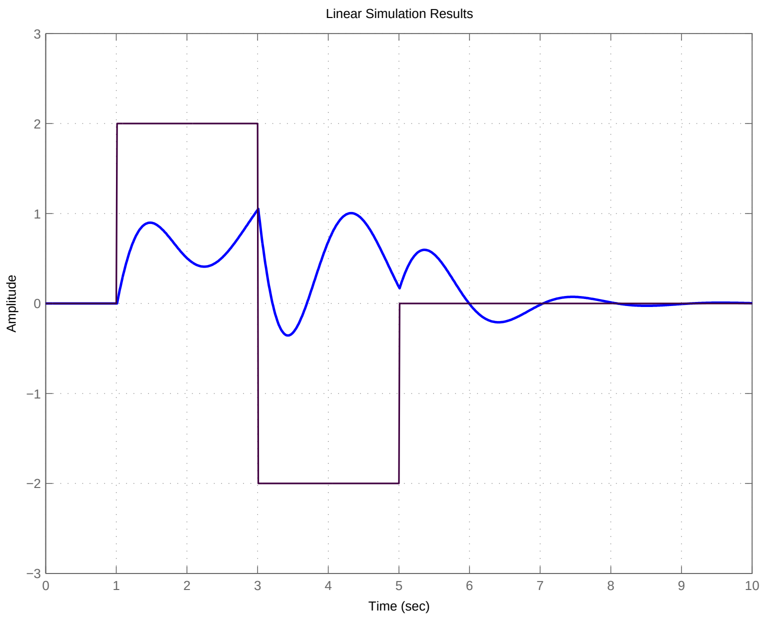

Figura 4: Risposta forzata per l’Esercizio 2

```
% Chiusura di tutte le figure aperte e pulizia delle variabili del
% workspace
clear all
close all

% Definizione dei sotto-intervalli temporali: il primo valore indica il
% primo istante, il secondo il passo di discretizzazione, il terzo
% l’istante finale di ciascun intervallo
t1 = 0:.01:1;
t2 = 1.01:.01:3;
t3 = 3.01:.01:5;
t4 = 5.01:.01:10;

% Definizione dell’ingresso associato ad ogni sotto-intervallo temporale.
% L’istruzione u = k*ones(size(t)) crea un vettore con tanti elementi
% quanti quelli di t, tutti col valore k
u1 = 0*t1;
u2 = 2*ones(size(t2));
u3 = -2*ones(size(t3));
u4 = 0*t4;

% Definizione del numeratore e del denominatore della funzione di
% trasferimento del sistema
```

```
%
%   num = [b_m b_(m-1) ... b_0]
%   den = [a_n a_(n-1) ... a_0]
%
num = [2 0 3];
den = [1 2 10 0];

% La funzione TF crea un modello a tempo continuo in termini di legame IU a
% partire da numeratore e denominatore della funzione di trasferimento
sys = tf(num,den);

% Definizione del vettore dei tempi
T = [t1 t2 t3 t4];

% Definizione del vettore degli ingressi
U = [u1 u2 u3 u4];

% La funzione lsim traccia l'evoluzione forzata del sistema dato un vettore
% di ingressi U e un vettore di tempi T
lsim(sys,U,T),grid
```