Analisi dei Sistemi

Soluzione compito del 14 Settembre 2005

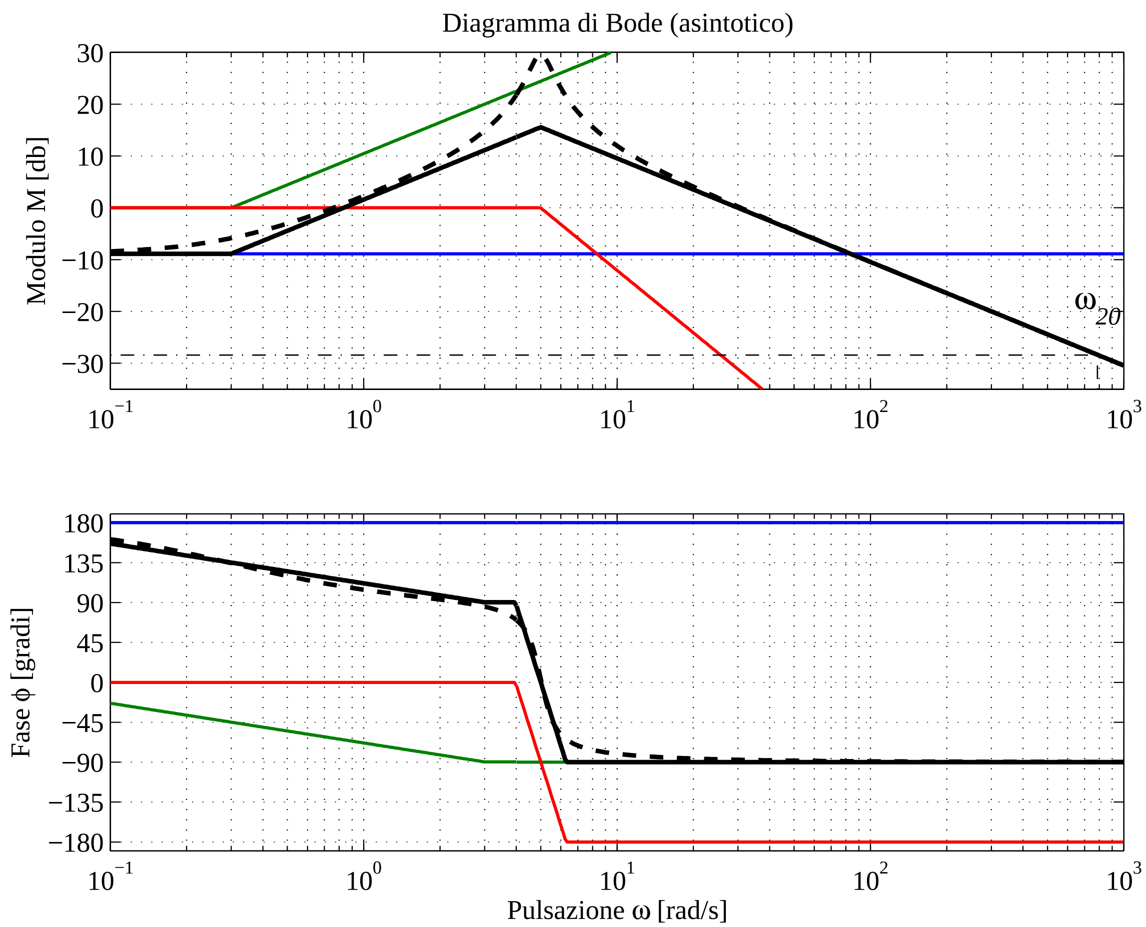
Esercizio 1

È necessario definire la stabilità, stabilità asintotica e la instabilità facendo riferimento ad un sistema in variabili di stato e legando tali proprietà agli autovalori della matrice di stato.

Esercizio 2

(a) La funzione di trasferimento ha i seguenti parametri:

Guadagno	$K = -0.36$	$K_{db} = -9$	
Numero poli nell'origine	$\nu = 0$		
Zero reale	$z = 0.3$	$\tau = -10/3$	$1/\|\tau\| = 0.3$
Coppia di poli complessi	$p = -0.5 \pm j4.98$	$\omega_n = 5$	$\zeta = 0.1$
	$\omega_s = 3.9$	$\omega_d = 6.3$	$\Delta M_{db} = 14$



(b) Il diagramma di Bode ha significato fisico di risposta a regime perché il sistema è stabile (i poli hanno parte reale negativa). Pulsazione: $\omega_{20} = 790$ db, banda $B_{20} = 125$.

(c) Per $\omega_1 = 0.8$rad/s e $\omega_2 = 30$rad/s vale

$$|W(j\omega_1)|_{\text{db}} = |W(j\omega_2)|_{\text{db}} = 0,$$

cioè

$$|W(j\omega_1)| = |W(j\omega_2)| = 1.$$

per tali valori di pulsazione dunque l'uscita a regime ha la stessa ampiezza dell'ingresso.

Esercizio 3

(a) Matrice di transizione dello stato
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & \frac{1}{3}\left(e^{2t} - e^{-t}\right) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Evoluzione libera dello stato
$$\vec{x}_\ell = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Evoluzione libera dell'uscita
$$\vec{y}_\ell = -3e^{-t}.$$

(b) La matrice A ha autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$ a cui competono due modi aperiodici:

- e^{2t} modo instabile con costante di tempo $\tau_1 = -1/\lambda_1 = -0.5$;
- e^{-t} modo stabile con costante di tempo $\tau_2 = -1/\lambda_2 = 1$:

Il modo più veloce è il secondo (è l'unico stabile) e il suo tempo di assestamento al 5% vale $t_{a,5} = 3\tau_2 = 3$.

(c) La matrice di controllabilità vale
$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
ed ha rango $2 = n$. Dunque la rappresentazione è controllabile.

La matrice di controllabilità vale
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$
ed ha rango $1 < n + 2$. Dunque la rappresentazione non è osservabile.

La funzione di trasferimento vale:
$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{3}{s+1}.$$

La non osservabilità determina la cancellazione del polo 2.