Analisi dei Sistemi

Soluzione del compito del 24 Gennaio 2005

Esercizio 1. Soluzione: (a) $\dot{y}(t) = u(t)$ (b) $W(s) = \frac{1}{s}$

(c) $w(t) = \delta_{-1}(t)$. Ad un impulso risponde con un gradino (integrale dell'impulso).

(d) Un polo $p = 0$: BIBO instabile. Al gradino unitario $\delta_{-1}(t)$ (segnale limitato) risponde con il la rampa lineare $t\delta_{-1}(t)$ (segnale non limitato).

(e) (2 punti) $\begin{cases} \dot{x}(t) &= u(t) \\ y(t) &= u(t) \end{cases}$ ovvero $A = [0], B = [1], C = [1], D = [0]$.

(f) $A = [0]$, $\lambda = 0$, stabile ma non asintoticamente.

Esercizio 2. Soluzione:

Funzione di trasferimento: $W(s) = 0.4 \, \dfrac{1 + s\varrho/20}{1 + 0.02s + 0.01s^2}$.

Guadagno	$K = 0.4$,	$K_{db} = -8$;	
Numero poli nell'origine	$\nu = 0$;		
Zero reale	$z = -20/\varrho = -2$,	$\tau = \varrho/20 = 0.5$,	$1/\lvert\tau\rvert = 20/\varrho = 2$;
Coppia di poli complessi	$p, p' = -1 \pm j9.95$,	$\omega_n = 10$,	$\zeta = 0.1$,
	$\Delta M_{db} = 14$db,	$\omega_s = 7.9$,	$\omega_d = 12.6$;

Se $\rho = 10$ vale: modulo alla risonanza $M_r = 20$ db alla pulsazione $\omega_r = 1$ rad/s; banda passante: $\omega_{20} = 505$ rad/s e $B_{20} = \omega_{20}/(2\pi) = 80$ Hz.

Per ridurre la banda passante occorre che il punto di rottura dello zero sia molto a destra di ω_n, cioè ϱ molto piccolo. Il valore minimo ottenibile coincide in questo caso con la pulsazione per cui la curva del termine trinomio vale -20 db, cioè $\omega_{20,\min} = 32$ rad/s e $B_{20,\min} = \omega_{20,\min}/(2\pi) = 5$ Hz.

Esercizio 3. Soluzione: le matrici della trasformazione sono $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e la nuova rappresentazione vale

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},\ B' = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ C' = CP = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},\ D' = D = 0.$$

Matrice di transizione dello stato: $e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (e^{-2t} + e^{-4t}) & (e^{-2t} - e^{-4t}) \\ (e^{-2t} - e^{-4t}) & (e^{-2t} + e^{-4t}) \end{bmatrix}$.

Evoluzione libera: $\vec{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} + e^{-4t} \\ 3e^{-2t} - e^{-4t} \end{bmatrix}$.

Matrice di controllabilità: $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, ha rango 1, non controllabile.

Matrice di osservabilità: $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, ha rango 2, osservabile.

Nella rappresentazione diagonale si vede che il modo e^{-2t} non è controllabile perchè la corrispondente riga di B è nulla.

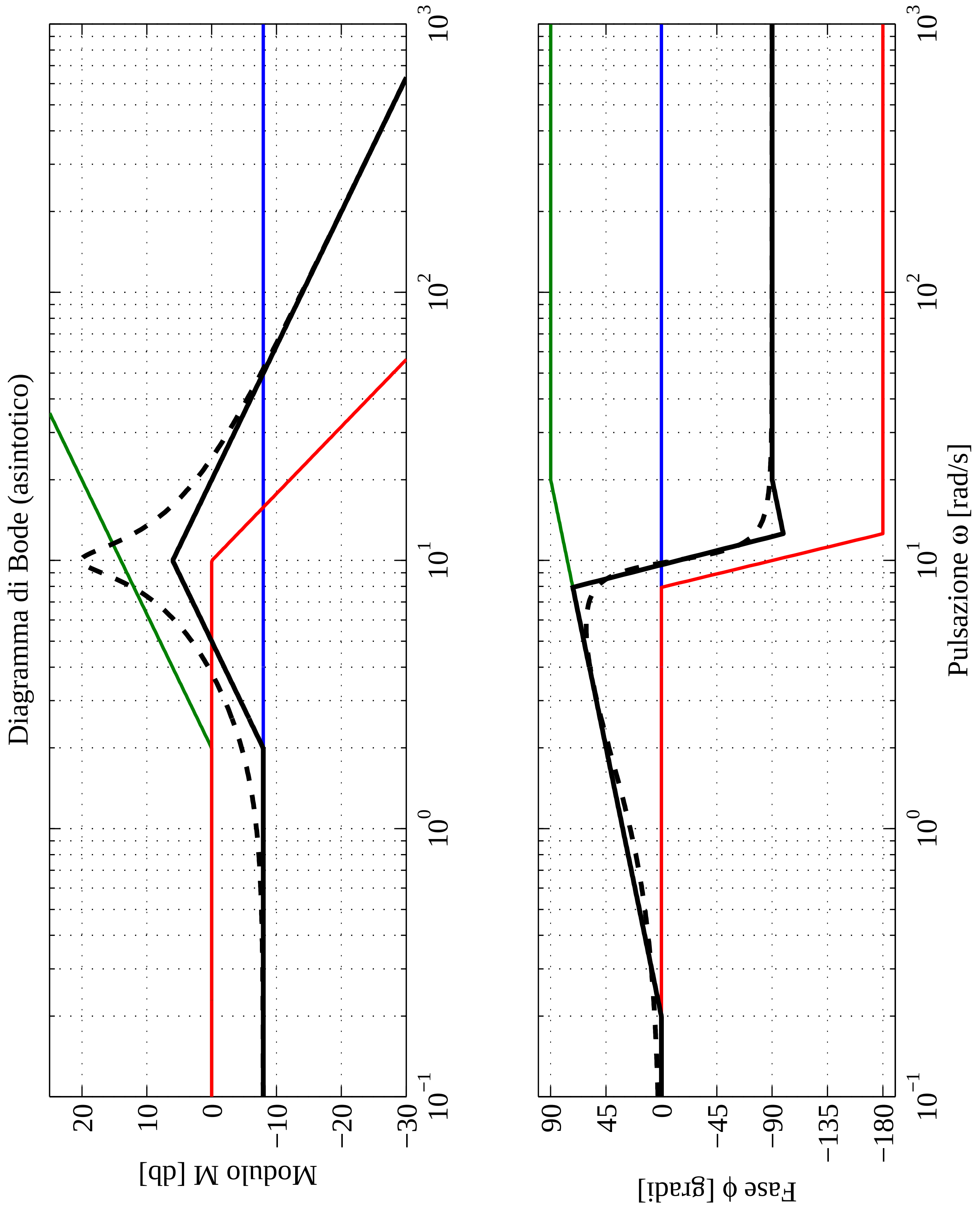

Diagramma di Bode (asintotico)
Modulo M [db]
20
10
0
−10
−20
−30
Fase ϕ [gradi]
90
45
0
−45
−90
−135
−180
Pulsazione ω [rad/s]
10^−1
10^0
10^1
10^2
10^3